

3

ANALIZA SERVOSISTEMELOR

Analiza servosistemelor presupune determinarea modului cum diverșii parametri constructivi-funcționali influențează comportarea dinamică a servosistemelor, respectiv parametrii caracteristici generalizați și performanțele caracteristice.

Parametrii caracteristici generalizați și performanțele caracteristice ale comportării dinamice, pot fi determinate prin metode grafo-analitice, prin analiza cu ajutorul caracteristicilor indiciale sau a caracteristicilor de frecvență, sau analitic, cu ajutorul funcțiilor de transfer. Deci o analiză completă a comportării dinamice a servosistemelor utilizate în acționarea roboților și manipuletoarelor presupune: -analiza cu ajutorul caracteristicilor indiciale; -analiza cu ajutorul funcțiilor de transfer; analiza cu ajutorul caracteristicilor de frecvență, etc.

3.1. ANALIZA CU AJUTORUL CARACTERISTICILOR INDICIALE

Analiza comportării dinamice pe baza caracteristicilor indiciale presupune mai întâi determinarea analitică a funcțiilor indiciale, pe baza schemelor bloc a servosistemelor supuse analizei. Această etapă este laborioasă datorită dificultății aplicării transformatei inverse Laplace mărimii de ieșire din cadrul servosistemului. În scopul aplicării transformatei inverse Laplace este necesară determinarea expresiei mărimii de ieșire $e(s)$ sub forma unor sume de fracții simple, pentru care există formule ale transformatei inverse Laplace. Este necesară deci determinarea mai întâi a polilor și zerourilor funcției de transfer.

Polii funcției de transfer sunt rădăcinile ecuației caracteristice. **Ecuația caracteristică** este ecuația determinată de numitorul funcției de transfer și reprezintă răspunsul libel al elementului sau sistemului. **Zerourile funcției de transfer** sunt rădăcinile ecuației zerourilor. **Ecuația zerourilor** este determinată de numărătorul funcției de transfer și reprezintă răspunsul forțat al elementului sau sistemului studiat.

Coeficienții funcției de transfer, exprimată sub forma unei sume de fracții, se determină cu ajutorul extinderii teoremei Heaviside.

Pentru cazul polilor singolari coeficienții se determină cu ajutorul relației:

$$C_i = (s + p_i)e(s)|_{s = -p_i} \quad (3.1)$$

Pentru cazul polilor multipli de ordinul n se va utiliza relația:

$$C_{n,k} = \frac{1}{n-k} \cdot \frac{d^{n-k}}{ds^{n-k}} [(s + p_i)^n e(s)]|_{s = -p_i} |_{k=1 \rightarrow n} \quad (3.2)$$

Determinarea funcției indiciale a funcției de transfer cu inerție de ordinul 1

Pe baza expresiei funcției de transfer cu inerție de ordinul 1, se determină expresia generală a mărimii de ieșire $e(s)$:

$$H(s) = \frac{k}{Ts + 1} = \frac{e(s)}{i(s)} \quad (3.3)$$
$$e(s) = \frac{k}{Ts + 1} i(s)$$

Dacă se consideră mărimea de intrare, $i(s)$ de tip treaptă unitară, se obține:

$$e(s) = \frac{k}{T} \left[\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \right]$$

Dacă se scrie expresia sub forma unei sume de fracții, se obține:

$$e(s) = \frac{k}{T} \left[\frac{C_{11}}{s} + \frac{C_{22}}{s + \frac{1}{T}} \right]$$

Coeficienții se determină prin aplicarea extinderii teoremei Heaviside:

$$C_{11} = s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \Big|_{s=0} = T$$

$$C_{22} = \left(s + \frac{1}{T}\right) \frac{1}{s(s + \frac{1}{T})} \Big|_{s=-\frac{1}{T}} = -T$$

După înlocuiri rezultă expresia funcției indiciale cu inerție de ordinul unu, de forma:

$$e(t) = k \left[1 - e^{-\frac{t}{T}} \right] \quad (3.4)$$

unde: k este răspunsul forțat, iar $e^{-t/T}$ – răspunsul liber al elementului sau sistemului.

Pe baza aceleași metodologii se determină expresia funcției indiciale și pentru sisteme de ordinul 2 de forma:

$$e(t) = 1 - e^{-\xi \omega_n t} \left[\cos(\omega_p t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_p t) \right] \quad (3.5)$$

sau

$$e(t) = \frac{k}{\sqrt{1-\xi^2}} \left[1 - e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_n t \sqrt{1-\xi^2} + \arctg \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}) \right] \quad (3.6)$$

unde: k este factorul total de amplificare; ξ - factorul de amortizare; ω_n - pulsația proprie.

Analiza pe baza caracteristicilor indiciale

Analiza parametrilor și a performanțelor comportării dinamice ale servosistemelor pe baza caracteristicilor indiciale reprezintă de fapt analiza modului de variație a mărimii de ieșire în funcție de timp. Caracteristicile indiciale pentru diverse mărimi de intrare sunt prezentate în fig.3.1 a,b,c:

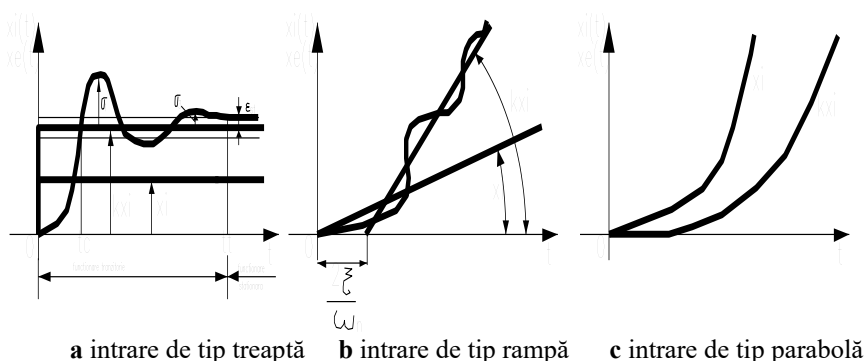


Fig3.1 Caracteristici indiciale pentru diverse mărimi de intrare

În urma analizării caracteristicilor indiciale se pot trage următoarele concluzii asupra parametrilor caracteristici generalizați:

-**timpul de creștere** (timpul după care mărimea de ieșire crește de la 0.1 la 0.9 din valoarea staționară) și care exprimă promptitudinea servosistemului studiat; se determină intersectând orizontala corespunzătoare mărimii de ieșire staționară, cu caracteristica indicială;

Pentru o funcție de transfer cu inerție de ordinul 1 acesta rezultă analitic cu relațiile:

$$\text{pentru } e(t)=0.1 \quad 0.1 = 1 - e^{-\frac{t}{T}}; \quad e^{-\frac{t}{T}} = 0.9; \quad \ln(0.9) = -\frac{t}{T}; \quad t_1 = 0.1054 \cdot T;$$

$$\text{pentru } e(t)=0.9 \quad \ln(0.1) = -\frac{t}{T}; \quad t_2 = 2.3026 \cdot T$$

Timpul de creștere în acest caz va fi:

$$t_2 - t_1 = 2.2T. \quad (3.7)$$

-timpul tranzitoriu t_t (timpul după care mărimea de ieșire are o valoare cuprinsă între +5% și -5% din valoarea staționară); se determină intersectând caracteristica indicală cu domeniul determinat de valoarea +5% și -5%, din valoarea mărimii de ieșire staționară;

Pentru o funcție de ordinul 1 acesta se determină cu relația:

$$\begin{aligned} e(t) &= 0.95 = 1 - e^{-\frac{t_t}{T}}; \\ t_t &= 2.9957T, \end{aligned} \quad (3.8)$$

iar pentru o funcție de ordinul 2, cu relația:

$$\begin{aligned} e^{-\xi\omega_n t} \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} &= 0.05, \\ t_t &= \frac{-\ln(0.05\sqrt{1-\xi^2})}{\xi\omega_n} \approx \frac{4.78}{\xi\omega_n} \end{aligned} \quad (3.9)$$

-factorul total de amplificare k (factorul de amplificare al mărimii de intrare); se determină cu ajutorul modelului matematic, anulând toți termenii conținând derivate;

-eroarea staționară ε (eroarea mărimii de ieșire față de valoarea teoretică); se determină cu relația:

$$\varepsilon = |kx_i - x_e(t_t)| \quad (3.10)$$

și exprimă precizia servosistemului analizat;

-factorul de amortizare ξ (factorul care asigură rezolvarea compromisului optim precizie-stabilitate); se determină cu relațiile:

$$\xi = 1 - \frac{\sigma_3}{\sigma_1} \quad \text{sau} \quad \xi = \frac{-\ln(\sigma[\%]/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\sigma[\%]/100)}} \quad (3.11)$$

-suprareglajul σ reprezintă abaterea maximă a mărimii de ieșire față de mărimea de ieșire staționară. Relația de calcul a suprareglajului rezultă ca diferență între valoarea maximă a mărimii de ieșire și valoarea staționară. Pentru determinarea suprareglajului se determină mai întâi constanta de timp pentru care mărimea de ieșire este maximă. Aceasta se determină din condiția de anulare a primei derivate a mărimii de ieșire:

$$\frac{de}{dt} = 0, \text{ unde mărimea de ieșire pentru un sistem oscilant amortizat, are expresia}$$

$$e(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left[\cos(\omega_p t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_p t) \right] \text{ în care:}$$

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \text{ este pulsația proprie (pulsația cu amortizare).} \quad (3.12)$$

Rezultă în final:

$$\sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t) = 0, \text{ sau } \omega_n \sqrt{1-\xi^2} t = n\pi, \text{ sau } t = \frac{n\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}.$$

În acest caz constanta maximă de timp se va exprima prin:

$$t_\sigma = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \quad (3.13)$$

Suprareglajul se determină cu relația:

$$\sigma[\%] = \frac{e_{\max}(t_{\sigma}) - e_{\text{final}}(t_i)}{e_{\text{final}}(t_i)} \cdot 100$$

unde:

$$e_{\max}(t_{\sigma}) = 1 + e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}, \text{ iar } e_{\text{final}}(t_i) = 1. \quad (3.14)$$

În final se obține relația pentru determinarea suprareglajului, de forma:

$$\sigma = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}. \quad (3.15)$$

-pulsăția naturală ω_n , reprezintă modul în care mărimea de ieșire oscilează, în perioada tranzitorie, fără amortizare, și se determină cu relația:

$$\omega_n = \frac{\omega_p}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (3.16)$$

servosistemele cu pulsații naturale mari sunt foarte precise, foarte prompte, dar apropiate de limita de stabilitate.

-pulsăția proprie ω_p reprezintă pulsația cu care oscilează mărimea de ieșire cu amortizare și se determină cu relația:

$$\omega_p = 2\pi \frac{nr.oscilații}{t_i}, \text{ sau } \omega_p = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \quad (3.17)$$

-pulsăția de rezonanță ω_R reprezintă pulsația la care amplitudinea răspunsului este maximă și se determină cu relația aproximativă:

$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2} \quad (3.18)$$

Analiza performanțelor pe baza caracteristicilor indiciale

Analiza performanțelor caracteristice ale unui servosistem presupune studiul: -preciziei; -promptitudinii; stabilității; -capacității de urmărire.

Analiza preciziei servosistemelor cu ajutorul caracteristicilor indiciale presupune a se determina eroarea staționară pentru intrare de tip treaptă, pentru diverse valori ale parametrilor constructivi-funcționali. Eroarea staționară se determină cu ajutorul relației (3.10), coeficienții acesteia fiind determinați prin analiza caracteristicilor indiciale. Servosistemul va fi mai precis cu cât eroarea staționară de poziție (intrare de tip treaptă), va fi mai mică.

Stabilitatea unui servosistem presupune capacitatea servosistemului de a atenua amplitudinea oscilațiilor răspunsului, după o perioadă de timp, strict definită ca fiind perioada tranzitorie de funcționare.

Un servosistem este mai stabil cu cât răspunsul se amortizează într-o perioadă tranzitorie mai mică. Servosistemul va funcționa instabil, dacă amplitudinea oscilațiilor în loc să se atenueze, se amplifică. În acest caz, perioada de funcționare în regim oscilatoriu este nelimitată. Curba înfășurătoare a oscilațiilor răspunsului, pentru funcționare instabilă este e^{at} ($a > 0$), deci o funcție exponențială divergentă. Trasând caracteristicile indiciale pentru diverse valori ale parametrilor constructivi-funcționali, se vor putea determina influențele acestora asupra funcționării stabile a servosistemului.

Analiza promptitudinii presupune a se determina viteza cu care un servosistem răspunde unei mărimi de intrare. Timpul de creștere este parametrul din cadrul caracteristicii indiciale care oferă informații privind promptitudinea servosistemului. Cu cât timpul de creștere va fi mai mic, cu atât se poate aprecia că servosistemul este mai rapid, dar mai apropiat de limita de stabilitate, întrucât crește foarte mult suprareglajul, și deci implicit, numărul de oscilații din perioada tranzitorie.

Deseori însă nu interesează numai un anumit parametru sau performanță a comportării dinamice a servosistemului, ci un set de performanțe, de exemplu interesează ca servosistemul să fie

foarte prompt, precis și stabil. După cum se observă unele din aceste performanțe se exclud reciproc, deci chiar dacă s-a determinat, din cadrul etapei de analiză, modul cum parametrii constructivi-funcționali influențează comportarea dinamică a servosistemelor, totuși va fi destul de dificil să se determine valoarea acestora în așa fel încât să fie obținute performanțele dorite. În scopul determinării optime a parametrilor constructivi-funcționali care asigură obținerea performanțelor dinamice necesare, se va aplica **metoda deciziei multiatribut**. Această metodă asigură alegerea variantei optime, din mai multe variante posibile, varianta care să fie cea mai apropiată de funcționarea optimă din punct de vedere dinamic a servosistemului analizat.

3.2. ANALIZA SERVOSISTEMELOR CU AJUTORUL FUNCȚIILOR DE TRANSFER

Funcția de transfer a unui element sau servosistem este reprezentată prin raportul dintre transformata Laplace a răspunsului și transformata Laplace a semnalului. Expresia generală a unei funcții de transfer în circuit deschis este de forma:

$$H_d(s) = \frac{1}{s^\alpha} \cdot \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \quad (3.19)$$

sau

$$H_d(s) = \frac{1}{s^\alpha} \cdot \frac{P^m(s)}{P^n(s)} \quad (3.20)$$

unde: m este gradul polinomului de la numărătorul funcției de transfer și reprezintă numărul zerourilor cu efect anticipativ, polinomul reprezentând componenta forțată a răspunsului; n - gradul polinomului de la numitorul funcției de transfer și reprezintă numărul polilor cu efect inerțial, polinomul reprezentând componenta liberă a răspunsului; α - ordinul de astatism și determină numărul polilor în origine.

Prin **statism** se înțelege că răspunsul elementului sau sistemului, pentru o anumită mărime de intrare, **are eroare staționară**, care pentru intrare de tip treaptă se numește **eroare de poziție**, pentru intrare de tip rampă se numește **eroare de viteză**, iar pentru intrare de tip parabolă se numește **eroare de accelerație**. Prin **astatism de ordinul unu** se înțelege că elementul sau sistemul respectiv **nu are eroare de poziție** (pentru intrare de tip treaptă), iar pentru cele cu **astatism de ordinul doi**, **nu are eroare de viteză** (pentru intrare de tip rampă), respectiv pentru cele cu **astatism de ordinul trei**, **nu are eroare de accelerație** (pentru intrare de tip parabolă).

Analiza comportării dinamice cu ajutorul funcțiilor de transfer

Analiza comportării dinamice cu ajutorul funcțiilor de transfer presupune determinarea funcțiilor de transfer în circuit deschis și închis urmată de determinarea parametrilor și a performanțelor, pe baza expresiei funcțiilor de transfer determinate.

Determinarea parametrilor caracteristici generalizați pe baza expresiei funcțiilor de transfer presupune: -determinarea factorului de amplificare în circuit deschis, prin calculul limitei funcției de transfer în circuit deschis:

$$k_D = \lim_{s \rightarrow 0} H_d(s) \quad (3.21)$$

-determinarea factorului de amplificare în circuit închis, prin calculul limitei funcției de transfer în circuit închis:

$$k_I = \lim_{s \rightarrow 0} H_i(s) \quad (3.22)$$

-determinarea factorului total de amplificare:

$$k_T = \frac{k_D}{k_I} \quad (3.23)$$

-determinarea constantei totale de timp:

$$T = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{H_i(s)}{H_d(s)} = \frac{1}{k_T} \quad (3.24)$$

Dacă funcția de transfer este o funcție de tip proporțională cu inerție de ordinul doi (cea mai întâlnită în analiza elementelor și sistemelor) de forma:

$$H_d(s) = \frac{k}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (3.25)$$

se pot defini și următorii parametrii caracteristici generalizați:

-pulsatia naturală:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}} \quad (3.26)$$

-pulsatia proprie:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}} \sqrt{1 - \frac{a_1^2}{4a_2 a_0}} \quad (3.27)$$

-pulsatia de rezonanta:

$$\omega_R = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}} \sqrt{1 - x \cdot \frac{a_1^2}{4a_2 a_0}} \quad (3.28)$$

unde $x=1.91$ pentru $\xi=0.3$; $x=1.94$ pentru $\xi=0.4$; $x=1.95$ pentru $\xi=0.5$; $x=1.98$ pentru $\xi=0.6$; $x=2.0004$ pentru $\xi=0.7$.

-pulsatia critică este pulsatia oscilației răspunsului de la care amplitudinea scade cu 3dB/decadă;

-timpul tranzitoriu:

$$t_i \approx \frac{4.78}{\frac{a_1}{2\sqrt{a_2 a_0}} \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}} \quad (3.29)$$

-suprareglajul-reprezinta abaterea maxima a oscilatiei raspunsului fata de valoarea stationara si are expresia :

$$\sigma = e^{-\frac{\frac{a_1}{2\sqrt{a_2 a_0}} \pi}{\sqrt{1 - \frac{a_1^2}{4a_2 a_0}}}} \quad (3.30)$$

Schemele bloc utilizate frecvent în cadrul modelării servosistemelor sunt constituite din elemente de tip dipolar, mult mai ușor de folosit. Însă, aceste elemente oferă informații trunchiate datorită aproximărilor introduse. Elementele de tip dipol sunt caracterizate de o mărime de intrare și de o mărime de ieșire, comparativ cu elementele de tip multipolar, mult mai apropiate de comportarea reală, care au mai multe mărimi de intrare și mai multe mărimi de ieșire. În fig.3.2 este reprezentat un element de tip dipolar, iar în fig.3.3 este reprezentat un element de tip multipolar.

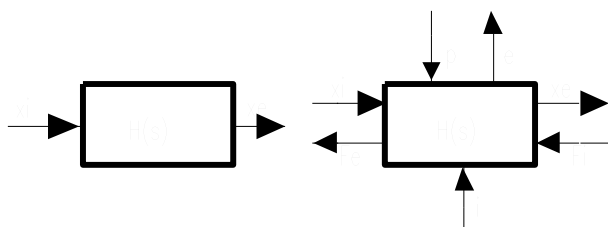


Fig.3.2 Schema unui element de tip dipol **Fig.3.3** Schema unui element de tip sexapol

Elementele de tip multipolar asigură analiza completă a comportării dinamice, prin considerarea atât a canalului de transmiterea informației de mișcare, cât și pe cea a canalului de transmiterea informației de efort. În acest mod se poate pune în evidență foarte ușor interdependența dintre intrările și ieșirile pe fiecare din cele două canale informaționale, cât și interdependența între

cele două canale informaționale. Întrucât modelarea cu ajutorul elementelor multipolare utilizează calculul matricial pentru determinarea funcțiilor de transfer, modelarea este mult mai greoaie fără utilizarea programelor specializate de calcul, motiv pentru care, cu unele aproximări, se poate utiliza modelul de tip dipolar.

În cazul modelării sexapolare, expresia funcției de transfer este:

$$H_d(s) = \frac{(e(s))}{(i(s))} = \frac{\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

iar mărimea de ieșire exprimată matricial:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11}i_1 + H_{12}i_2 + H_{13}i_3 \\ H_{21}i_1 + H_{22}i_2 + H_{23}i_3 \\ H_{31}i_1 + H_{32}i_2 + H_{33}i_3 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

Pentru un element sau sistem, modelat cu elemente de tip multipolar, expresia generală a mărimii de ieșire este:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ \dots \\ e_i \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & \dots & H_{1j} & \dots & H_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{i1} & \dots & H_{ij} & \dots & H_{im} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{n1} & \dots & H_{nj} & \dots & H_{nm} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ \dots \\ i_j \\ \dots \\ i_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11}i_1 + \dots + H_{1j}i_j + \dots + H_{1m}i_m \\ \dots \\ H_{i1}i_1 + \dots + H_{ij}i_j + \dots + H_{im}i_m \\ \dots \\ H_{n1}i_1 + \dots + H_{nj}i_j + \dots + H_{nm}i_m \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

iar funcția de transfer H_{ij} se determină cu relația:

$$H_{ij}(s) = \frac{e_i(s)}{i_j(s)}.$$

În fig.3.4 este evidențiat un sistem cu trei funcții de transfer de tip dipol și o reacție externă.

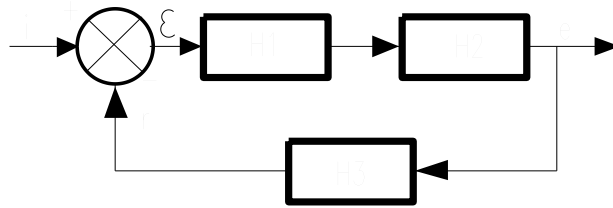


Fig.3.4 Schema bloc a unui sistem cu legătură de reacție externă

H_1 este funcția de transfer a corecției și regulatorului; H_2 - funcția de transfer a elementului de execuție și a organului mobil; H_3 - funcția de transfer a traductorului; i - mărimea de intrare; e - mărimea de ieșire; r - mărimea de reacție; ε - eroarea.

Funcția de transfer în circuit închis este definită ca fiind raportul dintre transformata Laplace a mărimii de ieșire și transformata Laplace a mărimii de intrare. Funcția de transfer are expresia:

$$H_i(s) = \frac{L[e(t)]}{L[i(t)]} = \frac{H_1 H_2}{1 + H_1 H_2 H_3} \quad (3.34)$$

Funcția de transfer în circuit deschis este raportul dintre transformata Laplace a reacției și transformata Laplace a erorii. Funcția de transfer are expresia:

$$H_d(s) = \frac{L[r(t)]}{L[\varepsilon(t)]} = H_1 H_2 H_3 \quad (3.35)$$

În acest caz funcția de transfer în circuit închis se mai poate exprima:

$$H_i(s) = \frac{H_1 H_2}{1 + H_d} \quad (3.36)$$

În caz general, pentru un sistem cu mai multe bucle de reacție, funcția de transfer în circuit închis este:

$$H_i(s) = \frac{H_{dir}(s)}{1 + H_{r1}(s) + H_{r2}(s) + \dots + H_{rn}(s)} \quad (3.37)$$

unde: $H_{dir}(s)$ este funcția de transfer în circuit direct între intrare și ieșire; $H_{r1}(s)$ - funcția de transfer a buclei de reacție r_1 , cea mai interioară; $H_{rn}(s)$ - funcția de transfer a buclei de reacție externă.

Determinarea performanțelor servosistemelor cu ajutorul funcțiilor de transfer presupune determinarea: preciziei, promptitudinii, stabilității și capacității de urmărire.

Determinarea preciziei servosistemelor cu ajutorul funcțiilor de transfer presupune calculul erorii staționare. În acest scop se va determina expresia erorii staționare funcție de mărimea de intrare. Pe baza schemei bloc din fig.3.4 se scrie:

$$\varepsilon(s) = \frac{1}{1 + H_d(s)} \cdot i(s) \quad (3.38)$$

Întrucât interesează eroarea staționară în domeniul real, se aplică teorema valorii finale funcției care exprimă eroarea, deci se scrie:

$$\varepsilon_{st} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \varepsilon(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + H_d(s)} \cdot i(s) \quad (3.39)$$

Calculul erorii staționare de poziție pentru un sistem cu astatism de ordinul zero

Întrucât se studiază eroarea staționară de poziție, mărimea de intrare este de tip treaptă. În acest caz relația (3.39) se scrie:

$$\varepsilon_{st} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + H_d(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} H_d(s)} = \frac{1}{1 + k_d} \quad (3.40)$$

Eroarea staționară de poziție în acest caz (a servosistemelor cu astatism de ordinul zero) este minimă în cazul în care factorul de amplificare în circuit deschis este maxim, deci și k_1 , k_2 , k_3 , factorii de amplificare ai fiecărei funcții de transfer, sunt maximi.

Calculul erorii staționare de poziție pentru un sistem cu astatism de ordinul unu

Funcția de transfer în circuit deschis, în cazul în care sistemul are astatism de ordinul unu are expresia:

$$H_d(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \quad (3.41)$$

Eroarea staționară în acest caz va fi:

$$\varepsilon_{st} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{s} \cdot \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0}} \cdot \frac{1}{s} \rightarrow 0 \quad (3.42)$$

Sintetic, eroarea pentru diverse ordine de astatism și pentru diverse intrări, este prezentată în tabelul 3.1.

Tabelul 3.1

Nr.crt.	Sistem cu statism	Sistem cu astatism de ordinul 1	Sistem cu astatism de ordinul 2	Sistem cu astatism de ordinul 3
---------	-------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------

Eroare de poziție	$\frac{1}{1+k_d}$	0	0	0
Eroare de viteză	∞	$\frac{1}{k_d}$	0	0
Eroare de accelerație	∞	∞	$\frac{1}{k_d}$	0

Determinarea promptitudinii servosistemelor cu ajutorul funcțiilor de transfer, se efectuează prin determinarea constantei de timp. Se va aprecia că un servosistem este mai prompt cu cît constanta de timp este mai mică. Constanta de timp este minimă dacă factorul de amplificare este maxim. Cu cît crește factorul de amplificare, servosistemul va fi mai prompt, mai precis, dar mai apropiat de limita de stabilitate.

Determinarea stabilității servosistemelor cu ajutorul funcțiilor de transfer, constă în aplicarea criteriului algebric de stabilitate, Routh- Hurwitz.

Condiția necesară și suficientă pentru ca un sistem să fie stabil este ca toți polii funcției de transfer $H_d(s)$, să fie situați în semiplanul stîng al planului complex. Celelalte criterii de stabilitate au fost amintite în cadrul celorlaltor moduri de analiza a servosistemelor.

Studiul cu ajutorul metodei locului rădăcinilor

Locul rădăcinilor reprezintă locul geometric al rădăcinilor ecuației caracteristice (ecuația polilor) și a ecuației zerourilor, atunci cînd coeficienții acestor ecuații sunt parametrizați funcție de un anumit parametru a cărui valoare va fi modificat între anumite limite. Aceste limite sunt stabilite funcție de domeniul de interes specificat în tema de proiectare, valori care pot fi obținute fizic. Cu ajutorul metodei locului rădăcinilor se poate determina, ținînd cont de semnificația elementelor legate de poziția polilor și a zerourilor în planul poli-zerouri, valoarea maximă a factorului de amplificare sau a oricărui alt factor constructiv-funcțional, care să rezolve compromisul optim precizie-stabilitate.

Cu cît servosistemul va fi mai precis, va fi mai prompt, dar mai apropiat de limita de stabilitate, iar locul rădăcinilor mai apropiat de axa imaginară.

Metoda locului rădăcinilor, constă în determinarea locului geometric al polilor și zerourilor funcției de transfer a servosistemului, atunci cînd toți polii și zerourile sunt exprimate funcție de un același parametru constructiv-funcțional, iar acestuia i se impune o variație între limitele de interes stabilite prin tema de proiectare.

În aplicațiile care urmează, rezolvate cu ajutorul unor programe realizate în MathCad, LabView, pentru cazuri concrete, se poate constata modul cum este influențată comportarea dinamică a elementului de execuție, de anumiți parametri constructiv- funcționali.

Cu ajutorul acestei metode se va putea optimiza comportarea dinamică și stabili valoarea parametrilor constructivi-funcționali în așa fel încît funcționarea să fie optimă.

Domeniul de variație al parametrilor constructivi-funcționali se stabilește funcție de aplicația în care se implementează servosistemul, de condiția de realizare fizică a servosistemului, de componentele constructiv-funcționale ale servosistemului, de domeniul de lucru, etc.

Prin studiul asistat al locului rădăcinilor, împreună cu caracteristicile Bode și locul de transfer Nyquist, se va putea determina compromisul optim precizie-stabilitate, funcție de aplicația robotului în cadrul celei de fabricație flexibilă.

Se consideră un sistem, care poate fi aproximat printr-o funcție de transfer de tip (PT3), proporțională cu inerție de ordinul 3, de forma:

$$H(s) = \frac{k}{(T_i s + 1) \cdot (T_{i2} s^2 + T_{i1} s + 1)}$$

unde: $T_{i1,i2}$ sunt constantele inerțiale, iar k este factorul de amplificare. Funcția de transfer are un pol real și doi poli complex conjugați. Existența polilor complex-conjugați determină oscilația mărimii de ieșire. Se consideră cazul cel mai defavorabil și anume că frecvența, la care apare oscilația răspunsului sistemului, este joasă. Dacă acești coeficienți, determinați după aplicarea transformatei Laplace, modelului matematic determinat pentru funcționarea în regim dinamic a sistemului, pot fi exprimați în funcție de un parametru variabil p , a cărei influență asupra comportării dinamice a sistemului se dorește a fi cercetată, funcția de transfer poate fi exprimată astfel:

$$H(s) = \frac{k}{[T_i(p)s + 1] \cdot [T_{i2}(p)s^2 + T_{i1}(p)s + 1]}$$

După trasarea asistată a locului rădăcinilor ecuației polilor și a zerourilor pentru cazul în care parametrul p variază în domeniul p_{min} și p_{max} , se va obține un număr de curbe egal cu numărul polilor reali și a celor complex-conjugați. Se consideră alura locului rădăcinilor ca fiind cea din fig.3.5.

Punctele P_1 și P_2 , determinate de intersecția dintre ramurile locului rădăcinilor corespunzător polilor complex-conjugați, cu razele vectoare trasate pentru valorile unghiulare de $+53^\circ \dots -53^\circ$ (corespunzătoare unui factor de amortizare, $\xi=0.6$), exprimă limita de precizie-stabilitate, sistemul este precis, prompt și stabil. În afara acestei limite unghiulare, sistemul este mai precis, dar funcționarea este mai apropiată de limita de stabilitate absolută, domeniu determinat de axa imaginară a planului complex.

Punctele P_3 și P_4 , determinate de intersecția ramurilor locului rădăcinilor complex-conjugate cu axa imaginară, exprimă limita maximă de stabilitate. Pentru această poziție a polilor, sistemul lucrează foarte precis, foarte rapid, dar vulnerabil la orice factor perturbator care poate provoca instabilitate. Limita determinată de razele vectoare trasate pentru $+37^\circ$ și

-37° (limită determinată de un factor de amortizare, $\xi=0.8$) este limita inferioară de precizie-stabilitate, sistemul fiind mai lent, cu o precizie mai slabă, o promptitudine mai mică, dar mai stabil. În afara acestei limite, deci către poziții unghiulare mai mici, elementul sau sistemul este foarte lent, lucrează foarte amortizat. Totodată, cu ajutorul locului rădăcinilor se va putea stabili, domeniul de variație al frecvenței proprii, al frecvenței de tăiere, al frecvenței naturale, acestea fiind exprimate de ordonata, abscisa, respectiv raza vectoare al fiecărui punct al locului rădăcinilor. Totodată se va putea stabili și domeniul de variație al factorului de amortizare exprimat de cosinusul unghiului dintre raza vectoare și fiecare punct al locului rădăcinilor. Prin cunoașterea frecvenței proprii și maximizarea acesteia, se va putea obține o mărire a domeniului de frecvență în care poate lucra sistemul și deci o mărire a preciziei și a promptitudinii acestuia.

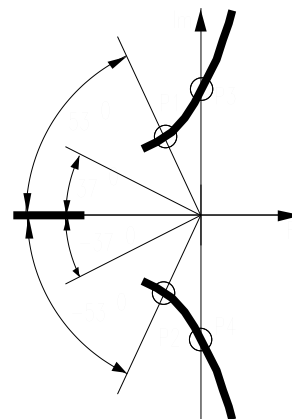


Fig.3.5 Locul rădăcinilor pentru o funcție de tip PT3

3.3. ANALIZA CU AJUTORUL CARACTERISTICILOR DE FRECVENȚĂ

În tehnica analizei și sintezei servosistemelor unele performante ale comportării dinamice nu pot fi determinate decât prin analiza caracteristicilor de frecvență. Aceste caracteristici arată modul cum variază amplitudinea și faza răspunsului cu frecvența. Cu ajutorul acestor caracteristici, se pot determina marja de stabilitate și precizie, capacitatea de urmărire, promptitudinea, etc.

Analiza cu ajutorul locului de transfer (caracteristica Nyquist)

Locul de transfer sau caracteristica Nyquist este construită pentru funcția de transfer în circuit deschis $H_d(s)$ pentru un anumit domeniu de variație al pulsației sau frecvenței și este reprezentată de variația amplitudinii (a modului funcției de transfer în circuit deschis) cu frecvența. Caracteristica mai este cunoscută și sub denumirea de caracteristica amplitudine-fază $A(\phi)$, sau hodograful funcției de transfer. Caracteristica este construită în coordonate polare, raza fiind determinată de amplitudine, iar unghiul, de fază.

Amplitudinea și faza se determină cu relațiile:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \sqrt{\operatorname{Re}^2(\omega) + \operatorname{Im}^2(\omega)} = |H_d(\omega)| \\ H_d(\omega) &= \operatorname{Re}(\omega) + j \operatorname{Im}(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \\ \varphi(\omega) &= -\arctg \frac{\operatorname{Im}(\omega)}{\operatorname{Re}(\omega)} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Caracteristica Nyquist pentru o funcție de transfer cu inerție de ordinul doi este reprezentată în fig.3.6.

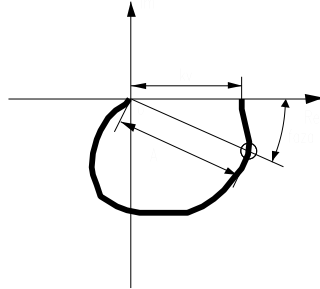


Fig.3.6 Caracteristica Nyquist pentru o funcție de transfer de ordinul 2

Amplitudinea maximă reprezintă amplitudinea la pulsația de rezonanță, iar faza corespunzătoare acestei pulsații reprezintă faza la rezonanță.

Pulsația de rezonanță se poate determina și prin compararea distanței dintre punctele învecinate ale caracteristicii. Astfel, în cazul în care distanța dintre două puncte învecinate de pe locul de transfer este maximă, acel punct reprezintă punctul în care amplitudinea este maximă, deci punctul frecvenței de rezonanță.

Servosistemele mecanice au bucla de amplitudine maximă deplasată către dreapta, deci către frecvențe mai joase (frecvențe de rezonanță mai joase), comparativ cu servosistemele electro-hidro-mecanice, fig.3.7.

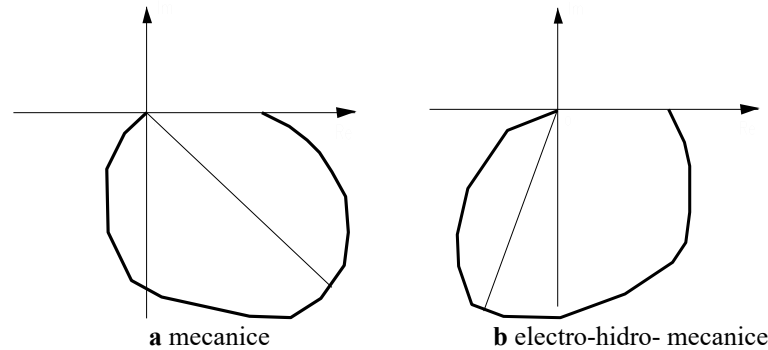


Fig.3.7 Caracteristicile Nyquist pentru diverse sisteme

Desenarea rapidă a locului de transfer, presupune determinarea coeficienților α și θ cunoscându-se expresia funcției de transfer în circuit deschis $H_d(s)$.

Dacă scriem funcția de transfer în circuit deschis $H_d(s)$ sub forma:

$$H_d(s) = \frac{1}{s^\alpha} \cdot \frac{P^m(s)}{P^n(s)}$$

θ fiind:

$$\theta = \alpha + n - m \quad (3.44)$$

unde: α este ordinul de astatism; n - numărul polilor; m - numărul zerourilor. Funcție de valoarea lui α și θ , locul de transfer va tinde asimptotic către axele de coordonate ca în fig.3.8.

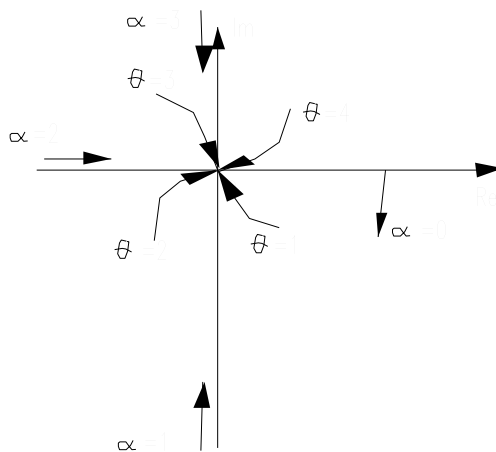


Fig.3.8 Schema de trasare rapidă a caracteristicilor Nyquist

În cazul unui sistem mecanic general fig.3.9, modelul matematic este:

$$m \frac{dx_e^2}{dt^2} + h \frac{dx_e}{dt} + kx_e = F_{ax} \quad (3.45)$$

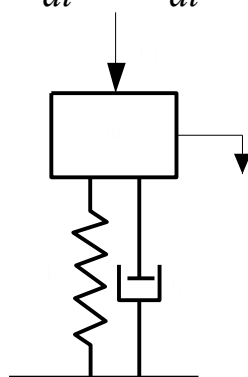


Fig.3.9 Schema bloc a unui sistem mecanic

unde: m este masa elementului; x_e - deplasarea elementului considerată ca mărime de ieșire; h - factorul de amortizare vîscoasă; k - constanta elastică a arcului; F_{ax} - forța excitatoare considerată ca mărime de intrare.

În acest caz, funcția de transfer în circuit deschis va avea expresia:

$$H_d(s) = \frac{x_e(s)}{F_{ax}(s)} = \frac{1}{ms^2 + hs + k} = \frac{1/k}{\frac{m}{k}s^2 + \frac{h}{k}s + 1} = \frac{k_s}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\frac{\xi}{\omega_n}s + 1} \quad (3.46)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}; \xi = \frac{h}{2\sqrt{mk}}; \omega_R = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

unde: ω_n - pulsația naturală a sistemului vibrator; ω_R - pulsația de rezonanță; ξ - factor care poate avea următoarele valori, funcție de factorul de amortizare ξ , 1.9...2.0004. [20]

Funcție de factorul de amortizare, locul de transfer va avea alurile ca în fig.3.10.

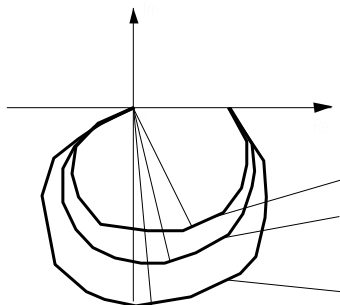


Fig.3.10 Caracteristicile Nyquist trasate pentru diverse valori ale factorului de amortizare $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$

Între modelele mecanice, electrice și fluidice există următoarea analogie [3]:

-ecuația generală pentru modelul electric este:

$$U = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt \quad (3.47)$$

-ecuația generală pentru modelul hidraulic este:

$$p = R_h Q + L_H \frac{dQ}{dt} + \frac{E}{V} \int Q dt \quad (3.48)$$

-ecuația generală pentru modelul mecanic este :

$$F = h \frac{dx}{dt} + m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx \quad (3.49)$$

unde: U este tensiunea de alimentare a circuitului electric [V]; R - rezistența circuitului [Ω]; i - intensitatea curentului electric [A]; C - capacitatea circuitului [F]; L - inductanța circuitului [H]; p - presiunea circuitului hidraulic [N/m^2]; R_h - rezistența circuitului hidraulic [Ns/m^5]; Q - debitul din circuitul hidraulic [m^3/s]; L_H - inertanța circuitului hidraulic [Ns^2/m^5]; E - modulul de elasticitate al uleiului [N/m^2]; V -volumul comprimat de fluid [m^3]; F - forța de excitație [N]; h - coeficientul de frecare vîscoasă [Ns/m]; x - deplasarea elementului mobil [m]; m - masa elementului mobil [Ns^2/m]; k - constanta elastică a arcului [N/m].

Astfel, **elementele disipative de natură electrică, hidraulică, mecanică** sunt determinate de:

$$R = \frac{U}{I} ; R_h = \frac{p}{Q} ; h = \frac{F}{dx/dt} \quad (3.50)$$

elementele acumulate de energie cinetică de natură electrică, hidraulică, mecanică sunt determinate de:

$$L = \frac{U}{di/dt} ; L_H = \frac{p}{dQ/dt} ; m = \frac{F}{d^2 x/dt^2} \quad (3.51)$$

elementele acumulate de energie potențială de natură electrică, hidraulică, mecanică sunt determinate de:

$$C = \frac{\int i dt}{U} ; \frac{V}{E} = \frac{\int Q dt}{p} ; k = \frac{F}{x} \quad (3.52)$$

Determinarea preciziei unui servosistem cu ajutorul caracteristicii Nyquist se realizează prin determinarea grafică a erorii staționare. În prealabil, se determină, analitic sau prin analiza caracteristicii indiciale, timpul tranzitoriu, apoi pulsația corespunzătoare acestei constante de timp, folosind relația:

$$\omega = \frac{2\pi}{t_t} \quad (3.53)$$

Se localizează pe locul de transfer, punctul a cărui pulsație este cea anterior determinată și se trasează un cerc cu raza egală cu amplitudinea corespunzătoare pulsației la timpul tranzitoriu. Prin însumare grafică, se determină eroarea staționară cu relația:

$$\varepsilon_{st} = x_i \cdot \left| k_v - \left| H_d(j\omega_{t_t}) \right| \right| \quad (3.54)$$

unde: x_i este mărimea de intrare; k_v - factorul de amplificarea; ω_{t_t} - pulsația la timpul tranzitoriu, fig.3.11.

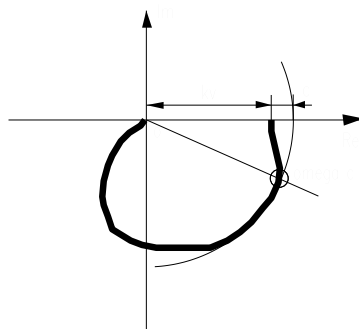


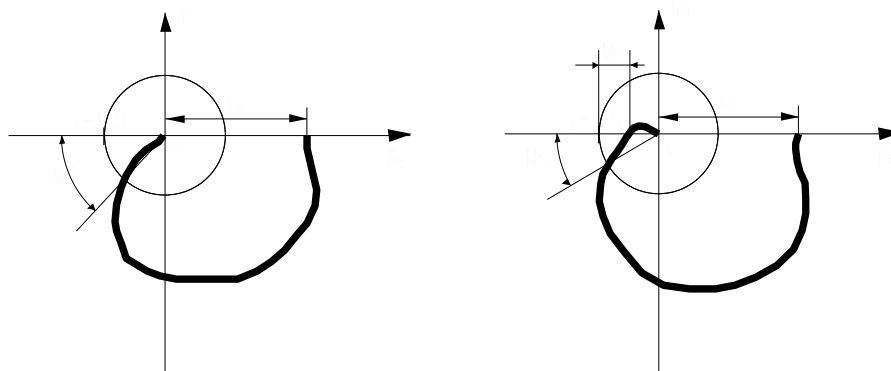
Fig.3.11 Determinarea grafo-analitică a erorii staționare cu ajutorul caracteristicii Nyquist

Studiul stabilității cu ajutorul caracteristicii Nyquist constă în verificarea criteriilor de stabilitate Nyquist. Criteriul de stabilitate generală Nyquist arată că, dacă funcția de transfer în circuit deschis are un număr de poli reali pozitivi, servosistemul este stabil, dacă locul de transfer ocolește prin dreapta în sens antiorar, punctul de coordonate $(-1,0)$ de un număr de ori egal cu numărul polilor reali pozitivi. Criteriul de stabilitate Nyquist arată că un servosistem cu poli reali negativi sau poli complex-conjugați, cu partea reală negativă, este stabil dacă, locul funcției de transfer în circuit deschis, ocolește prin dreapta, punctul de coordonate $(-1,0)$. Aceasta își găsește justificarea în faptul că, prin trecerea locului de transfer prin punctul $(-1,0)$, eroarea staționară devine infinită și deci servosistemul devine instabil.

Marja de stabilitate și precizie se determină prin aflarea marginii de fază și a marginii de câștig. Marginea de fază și marginea de câștig pot fi urmărite în fig. 3.12 și se determină cu relațiile:

$$M_{\varphi} = 180^{\circ} - \Phi_{(|H_d(j\omega)|=1)} \quad (3.55)$$

$$M_c = 1 - |H_v(j\omega_{\pi})|$$



a sistem proporțional cu inerție de ordinul 2

b sistem proporțional cu inerție de ordinul 3

Fig.3.12 Marginea de câștig și marginea de fază pentru diverse sisteme

Marginea de fază se definește ca fiind poziția unghiulară a razei vectoriale, care trece prin punctul de intersecție al locului de transfer, cu cercul cu raza egală cu unitatea, față de semi-axa reală negativă.

Marginea de câștig este determinată de diferența dintre amplitudinea unitară și amplitudinea locului de transfer, la pulsația corespunzătoare fazei de 180° .

În scopul rezolvării compromisului optim precizie-stabilitate, marginea de fază trebuie să fie cuprinsă între:

$$25^{\circ} < M_{\varphi} < 45^{\circ} \quad (3.56)$$

iar marginea de câștig:

$$0.2 < M_c < 0.3 \quad (3.57)$$

Un servosistem este mai precis și mai prompt cu cât marginea de fază se apropie de marginea superioară ($M_{\varphi}=45^{\circ}$), iar marginea de câștig se apropie de limita inferioară ($M_c=0.2$), dar în acest caz, comportarea servosistemului este mai apropiată de limita de stabilitate, iar răspunsul se atenuează după o perioadă mai lungă de timp. Un servosistem este mai stabil cu cât marginea de

cîștig este mai apropiată de valoarea 0.3, iar marginea de fază de limita inferioară. În acest caz servosistemul este mai lent și mai puțin precis, iar oscilațiile răspunsului se atenuează mult mai repede.

Analiza performanțelor cu ajutorul caracteristicii reale de frecvență

Caracteristica reală de frecvență reprezintă variația părții reale a funcției de transfer în circuit închis, funcție de frecvență. Dacă se consideră un servosistem cu reacție unitară de forma celui din figura 3.13.

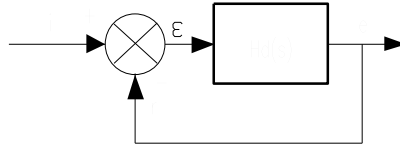


Fig. 3.13 Schema bloc sistem cu reacție unitară

funcția de transfer în circuit închis va avea expresia:

$$H_i(s) = \frac{H_d(s)}{1 + H_d(s)} \quad (3.58)$$

Dacă se ține cont de imaginea în planul complex a funcției de transfer în circuit deschis de forma:

$$H_d(s) = u(\omega) + jv(\omega) \quad (3.59)$$

după înlocuirea în expresia (3.58) și raționalizarea acesteia, se obține:

$$H_i(j\omega) = \frac{u + u^2 + v^2}{(1 + u)^2 + v^2} + j \frac{v}{(1 + u)^2 + v^2} = P(\omega) + jQ(\omega) \quad (3.60)$$

$$P(\omega) = \frac{u(\omega) + u^2(\omega) + v^2(\omega)}{(1 + u(\omega))^2 + v^2(\omega)}$$

unde $P(\omega)$ este partea reală a funcției de transfer în circuit închis a servosistemului analizat. $P(\omega) = k$ reprezintă o familie de cercuri tangente la dreapta $u = -1$.

Ecuția generală a cercului cu centrul în punctul de coordonate (a,b), funcție de sistemul axelor de coordonate u și v , este:

$$(u - a)^2 + (v - b)^2 = r^2 \quad (3.61)$$

Pentru $P(\omega) = 0$ se obține cercul:

$$\left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4} \quad (3.62)$$

cu centrul în punctul de coordonate $(-1/2, 0)$ și raza $r = 1/2$.

Analog se determină pentru $P(\omega) = 1, u = -1$, pentru $P(\omega) = 2$, cercul:

$$\left(u + \frac{3}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4} \quad (3.63)$$

cu centrul în punctul de coordonate $(-3/2, 0)$ și raza $r = 1/2$.

Pentru alte valori, intermediare celor prezentate, se obțin cercurile reprezentate în fig.3.14.

În scopul ridicării caracteristicii reale de frecvență se intersectează grafic familia de cercuri $P(\omega) = k$, cu locul de transfer al funcției în circuit deschis.

Astfel, se obțin perechile de puncte $(\omega, P(\omega))$.

Reprezentarea grafică a acestei dependențe constituie caracteristica reală de frecvență, fig.3.15.

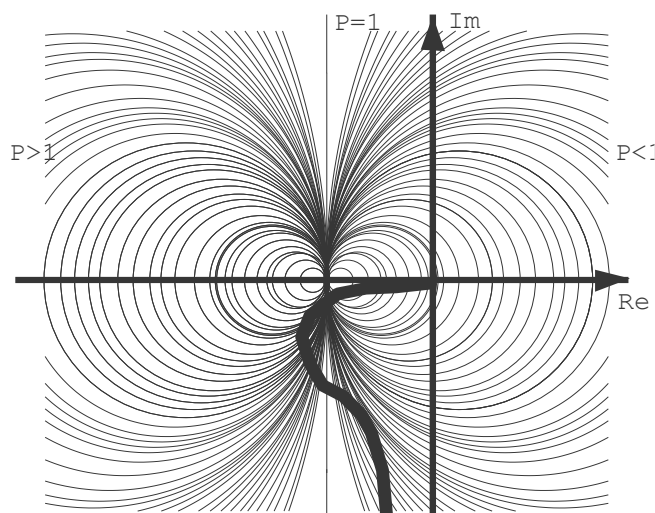


Fig.3.14 Intersecția locului de transfer cu familia de cercuri $P(\omega)=k$

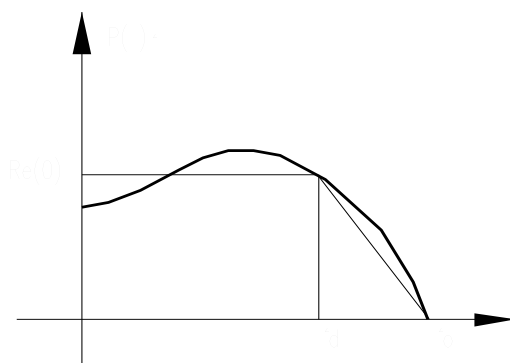


Fig.3.15 Caracteristica reală de frecvență

În scopul determinării caracteristicii indiciale, se aproximează caracteristica reală de frecvență cu un trapez, determinându-se punctele $Re(0)$, ω_d , respectiv ω_0 , și apoi se aplică relația:

$$e(t) = \frac{2}{\pi} Re(0) \left\{ si(\omega_d t) + \frac{\omega_0}{\omega_0 - \omega_d} [si(\omega_0 t) - si(\omega_d t)] + \frac{1}{\omega_0 - \omega_d} \cdot \frac{\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega_d t)}{t} \right\}, \quad (3.64)$$

unde funcția si reprezintă funcția sinus integral determinat cu relația:

$$si(\omega t) = \int_0^{\omega t} \frac{\sin(\omega t)}{\omega t} d(\omega t) \quad (3.65)$$

Pe baza caracteristicii indiciale se determină parametrii și performanțele comportării dinamice. Dacă, caracteristica reală de frecvență nu poate fi aproximată printr-un singur trapez, atunci se face aproximarea prin mai multe trapeze, urmată de integrarea grafică, pe porțiuni. Se determină apoi, câte o funcție indicială, $e(t)$ pentru fiecare zonă trapezoidală și apoi se compun funcțiile indiciale pe porțiuni.

Analiza performanțelor cu ajutorul caracteristicilor Bode $A(\omega)$ și $\varphi(\omega)$

Analiza comportării dinamice cu ajutorul caracteristicilor Bode $A(\omega)$ și $\varphi(\omega)$, se poate efectua în două moduri și anume:

a) analiza prin trasarea prin puncte a caracteristicii Bode, care cuprinde: -determinarea funcției de transfer a servosistemului; -treccrea funcției de transfer din planul Laplace în planul complex și raționalizarea acesteia; -trasarea prin puncte a caracteristicii; -determinarea pulsației de frîngere a caracteristicii, a pulsației de rezonanță și a pulsației critice, urmată de stabilirea tipului de filtru și a domeniului de frecvență; -interpretarea alurii caracteristicii.

b) analiza prin trasarea rapidă (aproximativă) a caracteristicii Bode, care cuprinde: -determinarea funcției de transfer a servosistemului; -determinarea polilor și zerourilor funcției de transfer; -trasarea rapidă a caracteristicii Bode cu respectarea regulilor rapide de trasare; -determinarea pulsațiilor de tăiere, prin analiza caracteristicii; -interpretarea rezultatelor, cu stabilirea căilor de optimizare a comportării dinamice.

După cum se observă, cele două metode diferă numai prin modul de trasare al caracteristicilor.

Pentru înțelegerea modului de trasare al caracteristicilor Bode prin puncte, se prezintă în continuare trasarea caracteristicilor Bode pentru funcția de transfer cu inerție de ordinul unu (PT1).

Expresia funcției de transfer este:

$$H_d(s) = \frac{k}{Ts + 1}$$

După trecerea funcției de transfer din planul Laplace în planul complex și raționalizarea expresiei acesteia, se obține:

$$H(j\omega) = \frac{k}{1 + (T\omega)^2} - j \frac{k(T\omega)}{1 + (T\omega)^2} = \text{Re}(\omega) + j \text{Im}(\omega) \quad (3.66)$$

unde: T este constanta de timp de întârziere, k -factorul de amplificare, iar ω - pulsația curentă.

Amplitudinea și faza se vor determina cu relațiile:

$$A(\omega) = \sqrt{\text{Re}^2(\omega) + \text{Im}^2(\omega)} = \frac{k}{\sqrt{1 + (T\omega)^2}} \quad (3.67)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg(T\omega) \quad (3.68)$$

Caracteristicile trasate prin puncte, pot fi urmărite în figurile 3.16 și 3.17.

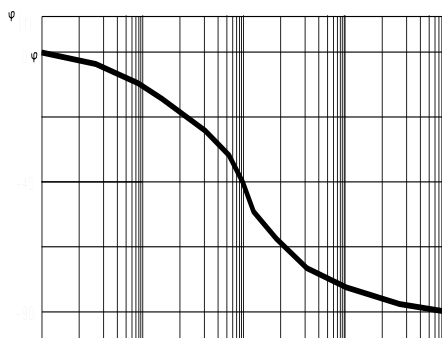
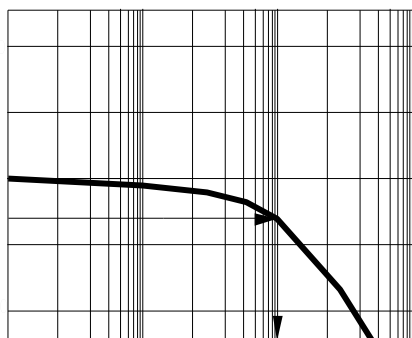


Fig.3.16 Caracteristica Bode $A(\omega)$ pentru un sistem tip PT₁ **Fig.3.17** Caracteristica Bode $\Phi(\omega)$ pentru un sistem tip PT₁

Caracteristica Bode $A(\omega)$ este construită în coordonate dublu logaritmice. Calculul amplitudinii în dB se efectuează cu relația:

$$A[db] = 20 \log A \quad (3.69)$$

Relația (3.69) provine din scrierea expresiei amplitudinii, exprimată în dB, pentru coordonate normate de putere, a răspunsului elementului sau sistemului:

$$A[db] = 10 \log_{10} \frac{\frac{F^2}{z}}{\frac{F_0^2}{z}} = 20 \log_{10} \frac{F}{F_0} \quad (3.70)$$

unde: z este impedența mecanică, care se determină cu relația $z = F/v$ [Ns/m], iar F -forța în [N] a răspunsului. Caracteristicile Bode amplitudine-frecvență și fază-frecvență, reflectă modul în care variază amplitudinea și faza răspunsului elementului sau servosistemului, atunci când la intrare se aplică un semnal periodic cu frecvența cuprinsă într-un domeniu de interes. Dacă unui servosistem i se aplică la un anumit moment o mărime de intrare periodică în timp, de pulsație ω și dacă sistemul

este stabil, după o perioadă de adaptare la noua solicitare, își va găsi o nouă situație staționară de funcționare, care va fi de același tip, periodică și cu aceeași pulsație ω .

Trasarea rapidă a caracteristicilor Bode, presupune mai întâi determinarea polilor și a zerourilor funcției de transfer a servosistemului sau elementului analizat, urmată de trasarea rapidă a caracteristicii, cu respectarea regulilor de trasare. Regulile de trasare rapidă a caracteristicii Bode amplitudine-frecvență cuprind următoarele: -astatismul de ordinul unu introduce o pantă a caracteristicii de -20 dB/dec; astatismul de ordinul doi introduce o pantă a caracteristicii de -40 dB/dec; -orice pol simplu introduce o pantă de -20 dB/dec; -orice pol dublu introduce o pantă de -40 dB/dec; -orice zero simplu introduce o pantă de +20 dB/dec; -orice zero dublu introduce o pantă de +40 dB/dec; -panta caracteristicii se păstrează pînă la următoarea pulsație de frîngere, care poate proveni dintr-un pol sau zero. Funcție de pulsația de frîngere întâlnită, caracteristica amplitudine-frecvență își modifică panta, corespunzător regulilor prezentate. Pulsațiile de frîngere a caracteristicii sunt constituite din polii sau zerourile reale, sau părțile reale ale polilor sau zerourilor complex-conjugate. În scopul înțelegerii modului de trasare rapidă a caracteristicii Bode amplitudine-frecvență, se consideră funcția de transfer de ordinul doi în cele trei variante posibile, și anume: -cînd răspunsul este supracritic, $\xi > 1$, ecuația caracteristică are doi poli reali și diferiți fig.3.18; -cînd răspunsul este critic, $\xi = 1$, ecuația caracteristică are doi poli reali și egali, fig.3.19; -cînd răspunsul este subcritic (oscilant) $\xi < 1$, ecuația caracteristică are doi poli complexi-conjugati, iar funcție de valoarea factorului de amortizare, comparată cu valoarea 0.6, caracteristicile Bode vor avea alurile ca în fig.3.20.

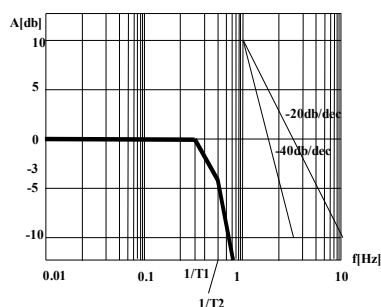


Fig.3.18 Caracteristica Bode $A(f)$ răspuns supracritic

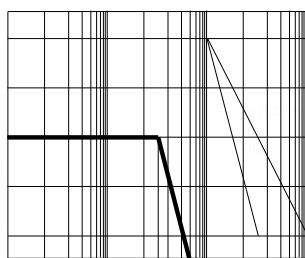


Fig.3.19 Caracteristica Bode $A(f)$ răspuns critic

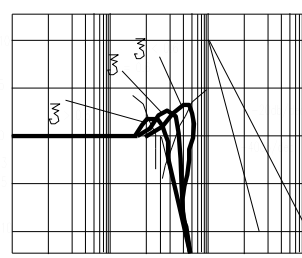


Fig.3.20 Caracteristica Bode $A(f)$ răspuns subcritic

Funcție de alura caracteristicii Bode, față de punctul de amplitudine -3 dB, punct de la care puterea răspunsului se diminuează cu 60 %, elementele sau servosistemele vor funcționa ca: -filtru trece jos **FTJ** (lasă să treacă răspunsul, care are o frecvență cuprinsă între 0 și frecvența critică ν_c);

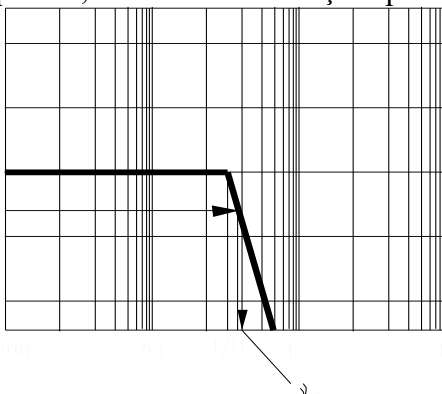


Fig.3.21 Filtru trece jos (FTJ)

-filtru trece sus **FTS** (lasă să treacă răspunsul, care are o frecvență cuprinsă între frecvența critică ν_c și marginea superioară a domeniului);

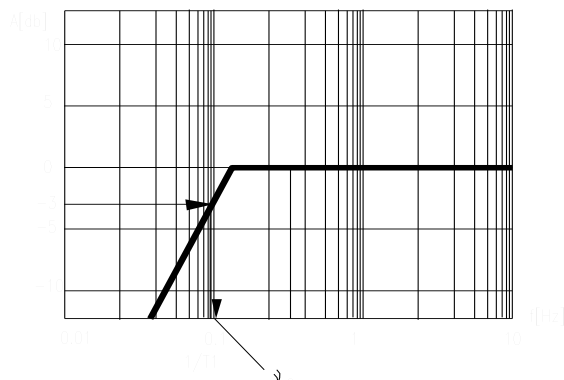


Fig.3.22 Filtru trece sus (FTS)

-filtru trece bandă de bandă largă sau bandă îngustă **FTB (BL sau BI)** (lasă să treacă răspunsul, care are o frecvență cuprinsă între două frecvențe critice, lărgimea benzii depinzând de poziția polilor);

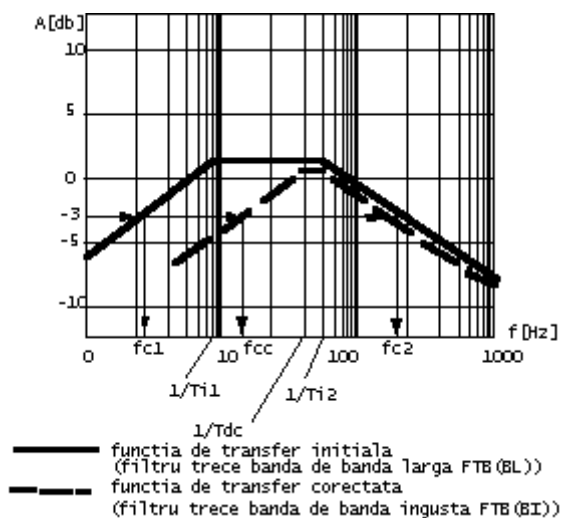


Fig.3.23 Filtru trece bandă de bandă largă și de bandă îngustă (FTB(BL)), (FTB(BI))

-filtru oprește bandă de bandă largă sau bandă îngustă **FOB (BL sau BI)** (oprește răspunsul, care are o frecvență cuprinsă între două frecvențe critice)

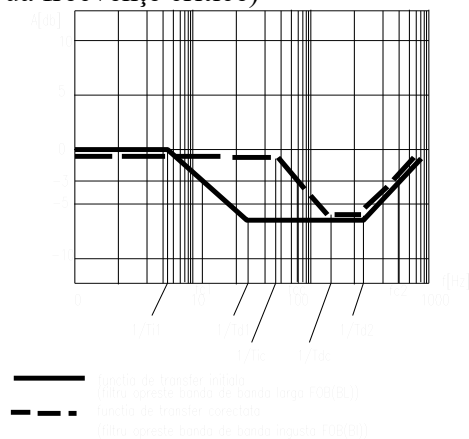


Fig.3.24 Filtru oprește bandă de bandă largă și de bandă îngustă (FOB(BL)), (FOB(BI))

-filtru trece bandă-oprește bandă de bandă largă sau bandă îngustă **FTB-OB (BL sau BI)** (lasă să treacă răspunsul care are o frecvență cuprinsă între primele două frecvențe critice și oprește răspunsul care are o frecvență cuprinsă între alte două frecvențe critice);

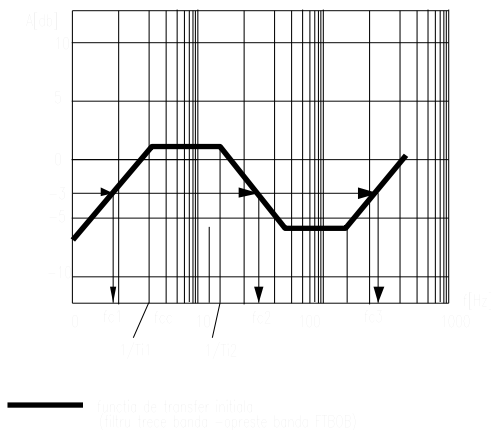


Fig.3.25 Filtru trece bandă de bandă largă și oprește bandă de bandă largă (FTB(BL)OB(BL))

3.4.ANALIZA COMPORTĂRII DINAMICE ÎN SPAȚIUL STĂRILOR

Spre deosebire de modelele funcționale, reprezentarea servosistemelor în spațiul stărilor presupune folosirea unui vector de stare cu ajutorul căruia se poate defini starea sistemului în orice moment. Starea unui servosistem reprezintă o cantitate de informație despre sistem, cu ajutorul căreia se poate stabili evoluția sa viitoare, dacă se cunoaște mărimea de intrare.

Vectorul de stare aparține spațiului n dimensional, numărul componentelor depinzând de ordinul ecuației diferențiale a servosistemului analizat. De regulă, acest vector de stare se notează cu x și are n componente x ($x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$).

Analiza în spațiul stărilor prezintă următoarele avantaje: -oferă informații privind evoluția sistemului când se cunoaște mărimea de intrare; -conduce la determinarea unei funcții de transfer globale (pentru întreg servosistemul), utilizând modelarea multipolar-matricială; - asigură determinarea ușoară și rapidă a oricărei mărimi de ieșire, cunoscând mărimile de intrare și vectorul de stare; - asigură, pe baza modelului multipolar, o analiză rapidă a comportării dinamice, etc.

Schema bloc în spațiul stărilor poate fi urmărită în fig.3.26.

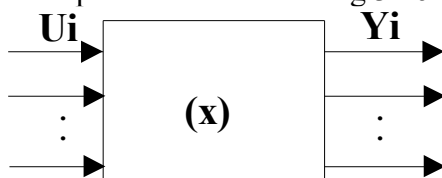


Fig.3.26 Reprezentarea generală în spațiul stărilor

Ecuațiile generale în spațiul stărilor sunt:

$$\dot{(x(t))} = [A](x(t)) + [B](u(t)) \text{ -ecuația de stare} \quad (3.71)$$

și

$$(y(t)) = [C](x(t)) + [D](u(t)) \text{ -ecuația de ieșire,} \quad (3.72)$$

unde: $(u(t)) \in R^{r \times 1}$ este vectorul mărimilor de intrare; $-(x(t)) \in R^{n \times 1}$ -vectorul mărimilor de stare; $(y(t)) \in R^{m \times 1}$ - vectorul mărimilor de ieșire; - $[A] \in R^{n \times n}$ -matricea de stare a elementului sau sistemului; $[B] \in R^{n \times r}$ -matricea de comandă; $-[C] \in R^{m \times n}$ -matricea de observare; $-[D] \in R^{m \times r}$ -matricea de legătură directă.

O reprezentare a stării în spațiul $R[A, B, C, D]$, a unui sistem dinamic liniar, se poate obține plecând de la schema de simulare a sistemului, compus din funcții elementare de tip sumator, multiplicator cu o constantă, integrator, etc.

Se consideră o funcție de transfer de tip PD₂T₃, ca fiind cea mai utilizată în modelarea comportării dinamice a elementelor și sistemelor mecanice și mecano- electrice de forma:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (3.73)$$

Pentru a se obține forma canonică guvernabilă, funcția de transfer se exprimă astfel:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{y(s)}{z(s)} \cdot \frac{z(s)}{u(s)} \quad (3.74)$$

unde:

$$\frac{y(s)}{z(s)} = b_2 s^2 + b_1 s + b_0$$

și

$$\frac{z(s)}{u(s)} = \frac{1}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}.$$

Din aceste două funcții de transfer se deduc cele două ecuații diferențiale, unde variabila $z(t)$ este o variabilă intermediară de calcul:

$$z(s) \cdot (s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0) = u(s).$$

După aplicarea transformatei inverse Laplace se obține:

$$\frac{d^3 z}{dt^3} = -a_2 \frac{d^2 z}{dt^2} - a_1 \frac{dz}{dt} - a_0 z + u(t) \quad \text{și}$$

$$y(t) = b_2 \frac{d^2 z}{dt^2} + b_1 \frac{dz}{dt} + b_0 z(t).$$

Aceste ecuații conduc la schema de simulare din fig.3.27.

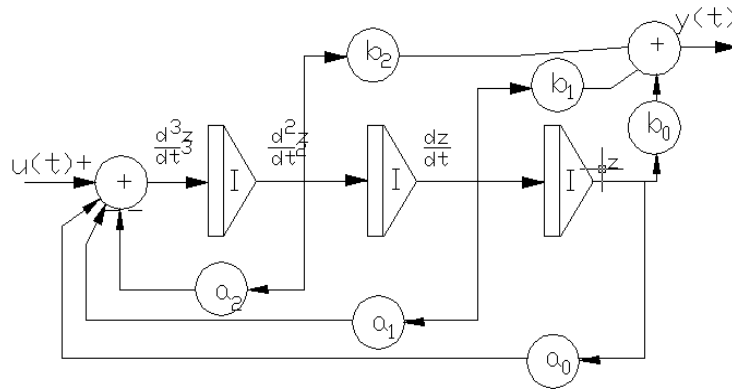


Fig.3.27 Schema bloc de simulare -forma canonică guvernabilă

Considerând ieșirile din integroare ca fiind componente ale vectorului de stare, se obține următorul model matematic:

$$x_1 = z$$

$$x_2 = \frac{dz}{dt} = \frac{dx_1}{dt}$$

$$x_3 = \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{dx_2}{dt}$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{d^3 z}{dt^3} = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 + u(t)$$

din care rezultă modelul în spațiul stărilor:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 + u(t)$$

$$y(t) = b_0 x_1 + b_1 x_2 + b_2 x_3$$

(3.75)

Modelul matriceal va fi de forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot u(t) \quad (3.76)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + (0) \cdot u(t)$$

Această reprezentare este forma canonică guvernabilă.

Pentru determinarea formei canonice observabile, funcția de transfer se scrie sub forma:

$$s^3 y(s) = s^2 (b_2 u - a_2 y) + s(b_1 u - a_1 y) + (b_0 u - a_0 y), \text{ sau} \\ y(s) = \frac{b_2 u - a_2 y}{s} + \frac{b_1 u - a_1 y}{s^2} + \frac{b_0 u - a_0 y}{s^3}. \quad (3.77)$$

Mărimea de ieșire, $y(s)$ se mai poate exprima astfel:

$$y(s) = \frac{1}{s} \{b_2 u - a_2 y + \frac{1}{s} [b_1 u - a_1 y + \frac{1}{s} (b_0 u - a_0 y)]\}. \quad (3.78)$$

După aplicarea transformatei inverse Laplace, se determină funcția indicială, $y(t)$:

$$y(t) = x_{30} + \int_0^t \{b_2 u - a_2 y + x_{20} + \int_0^t [b_1 u - a_1 y + x_{10} + \int_0^t (b_0 u - a_0 y) dt] dt\} dt. \quad (3.79)$$

Ecuția conduce la o schemă de simulare ca în fig.3.28.

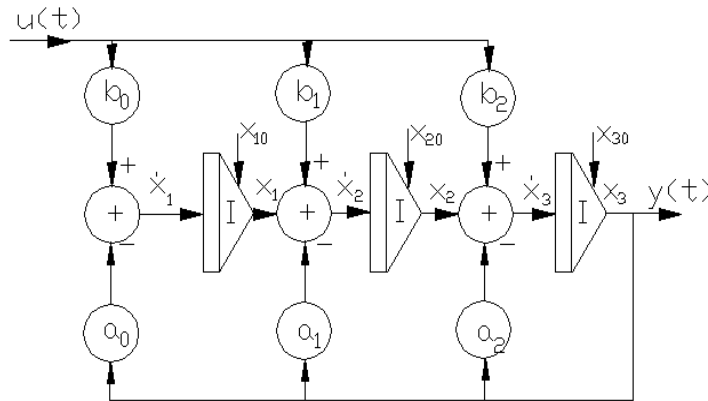


Fig.3.28 Schema bloc de simulare -forma canonică observabilă

Ecuțiile de stare, în acest caz sunt reprezentate de:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= b_0 u(t) - a_0 y(t) \\ \dot{x}_2 &= b_1 u(t) - a_1 y(t) + x_1 \\ \dot{x}_3 &= b_2 u(t) - a_2 y(t) + x_2 \\ y(t) &= x_3 + x_{30} \end{aligned} \quad (3.80)$$

Matriceal, modelul matematic în spațiul stărilor are forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cdot u(t) \quad (3.81)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + (0) \cdot u(t).$$

Matricile componente sunt în acest caz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, C = [0 \quad 0 \quad 1], D = 0.$$

Această reprezentare este forma canonică observabilă.

În cazul în care sistemul are trei poli reali și diferiți p_1, p_2, p_3 , funcția de transfer este de forma:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_0}{(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3)}.$$

După descompunerea în fracții simple se obține:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_0}{(p_2 - p_1)(p_3 - p_1)} \cdot \frac{1}{s + p_1} + \frac{b_0}{(p_1 - p_2)(p_3 - p_2)} \cdot \frac{1}{s + p_2} + \frac{b_0}{(p_1 - p_3)(p_2 - p_3)} \cdot \frac{1}{s + p_3}, \text{ sau}$$

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\alpha_1}{s + p_1} + \frac{\alpha_2}{s + p_2} + \frac{\alpha_3}{s + p_3}.$$

Pentru condiții inițiale nule, se obține schema de simulare din fig.3.29.

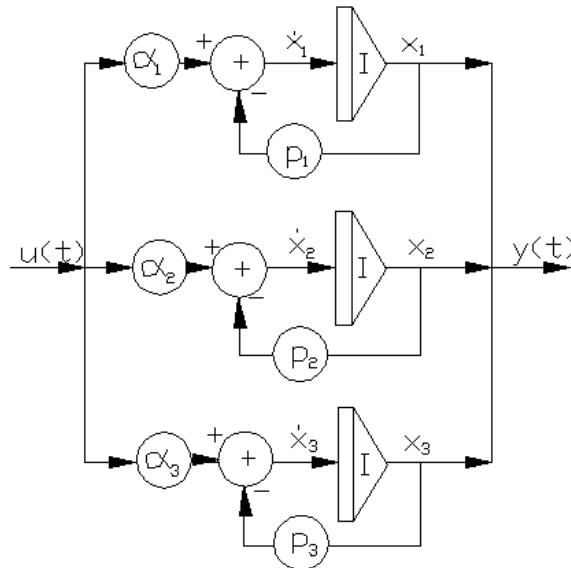


Fig.3.29 Schema bloc de simulare – reprezentarea diagonală

Ecuatiile de stare, în acest caz sunt:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 p_1 + \alpha_1 u(t) \\ \dot{x}_2 &= x_2 p_2 + \alpha_2 u(t) \\ \dot{x}_3 &= x_3 p_3 + \alpha_3 u(t) \\ y(t) &= x_1 + x_2 + x_3 \end{aligned} \quad (3.82)$$

Sub formă matriceală, ecuațiile din spațiul stărilor, devin:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \cdot u(t) \quad (3.83)$$

$$y(t) = [1 \quad 1 \quad 1] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + (0)u(t), \text{ în care componentele de stare}$$

sunt:

$$A = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix}, B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, C = [1 \quad 1 \quad 1], D = 0 \text{ și reprezintă forma}$$

diagonală a ecuațiilor de stare.

Un sistem mecanic care cuprinde o masă, un element elastic și un amortizor, se poate reprezenta prin ecuația diferențială generală de forma:

$$T_1 T_2 \frac{d^2 Y}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{dY}{dt} + Y = kU \quad (3.84)$$

unde: Y este răspunsul servosistemului; U - mărimea de intrare; T_1, T_2 - constantele de timp.

Se definește vectorul de stare al servosistemului, vectorul de forma $x(x_1, x_2)$:

$$\begin{aligned} x_1 &= Y \\ x_2 &= \frac{dY}{dt} = Y' = x_1' \end{aligned} \quad (3.85)$$

După unele înlocuiri se obține următorul model matematic:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= \frac{k}{T_1 T_2} U - \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} x_2 - \frac{1}{T_1 T_2} x_1 \\ Y &= [1 \quad 0](x_1, x_2)^T \end{aligned} \quad (3.86)$$

Relația (3.86) se poate scrie matricial:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_1 T_2} & -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{T_1 T_2} \end{bmatrix} u(t) \\ Y &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.87)$$

În caz general, după aplicarea transformatei Laplace și înlocuirea matricei Y în prima relație (3.71), se obține expresia funcției de transfer globale:

$$Y(s) = c^T [sI - A]^{-1} x_0 + c^T [sI - A]^{-1} B U(s) + D U(s) \quad (3.88)$$

iar funcția de transfer pentru sistemul multivariabil are expresia: (3.89)

$$H(s) = c^T [sI - A]^{-1} B + D$$

unde matricile c^T , A , B și I au expresiile:

$$c^T = [1 \quad 0]; A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_1 T_2} & -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{T_1 T_2} \end{bmatrix}; I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

Cu ajutorul funcției de transfer globale $H(s)$, relația (3.89), se vor putea interpreta performanțele comportării dinamice a întregului servosistem, precum și între diversele componente.