

2.3. MODELAREA PE BAZA ANALIZEI FENOMENOLOGICE

Modelarea comportării dinamice pe baza analizei fenomenologice presupune ca pe baza unor rezultate experimentale parțiale, să se poată determina alte valori, fie prin interpolarea precedentelor, fie prin testarea cu ajutorul unor programe de calcul specializate, a unor funcții și expresii globale, care din punct de vedere al modelelor fizice, s-ar apropia de comportarea dinamică a servosistemului supus analizei. Etapa este însoțită de determinarea, compararea și ajustarea modelului matematic propus inițial pentru modelul fizic.

Ca metode de interpolare sau de determinare a modelelor matematice, care aproximează cel mai bine unele date determinate experimental, se pot enumera:

-utilizarea polinomului de interpolare Lagrange, care constă în a determina ordonata unui punct experimental, pentru o valoare propusă pentru abscisă, valoare obținută prin interpolare, cu ajutorul unei relații de forma:

$$L = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot \frac{w_i}{z - x_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{z - x_i}} \quad (2.16)$$

unde: z -valoarea propusă pentru abscisa punctului, stabilită prin interpolarea punctelor determinate experimental; x_i -abscisele punctelor determinate experimental; w_i -funcția de interpolare; y_i -ordonatele punctelor determinate experimental;

-utilizarea polinomului de aproximare prin metoda celor mai mici patrate de forma:

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n \quad (2.17)$$

-utilizarea funcțiilor de interpolare cubică, spline, de forma:

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_i) + c_2(x - x_i)^2 + \dots + c_n(x - x_i)^n. \quad (2.18)$$

Metodele propuse, după cum se poate observa, utilizează valori ale unor puncte determinate pe baza cercetării experimentale a elementului sau servosistemului supus analizei și completează aceste puncte cu altele, determinate analitic pe baza precedentelor.

2.4. ANALIZA SEMNALELOR.TRANSFORMATATA FOURIER

În general în tehnica servoacționărilor utilizate în construcția roboților și manipuletoarelor, elementele componente se reprezintă sub forma cuadripolilor cu dipozi de intrare-ieșire a semnalului, bine precizate. Oscilația aplicată la bornele de intrare este denumită de obicei semnal, iar cea de la ieșire este răspunsul circuitului sau componente servosistemului, la semnalul aplicat. Răspunsul componente i a servosistemului constituie semnal pentru componenta următoare, $i+1$.

Mărimile de intrare (semnale) și cele de ieșire (răspunsuri), pot fi exprimabile funcție de timp sau funcție de una sau mai multe coordonate generalizate. Funcție de aceasta, semnalele pot fi deterministe sau întâmplătoare.

Un semnal este determinist dacă este exprimabil funcție de timp, $x(t)$; semnalul sinusoidal este determinist pentru că se poate scrie :

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

presupunând amplitudinea A , frecvența unghiulară ω și faza inițială φ ca marimi constante.

Semnalul determinist poate fi calculat pentru orice moment t , fiind previzibil pe un interval de timp nelimitat.

Un semnal întâmplător nu poate fi exprimat funcție de timp și nu este previzibil.

Semnalele pot fi continue sau discontinue și aceasta indiferent de faptul dacă sunt deterministe sau aleatoare. Discontinuitățile sunt efectul evoluției procesului fizic reprodus de semnal, sau sunt introduse în mod artificial în construcția servosistemului, în vederea prelucrării convenabile a

semnalului. În fig.2.2 este arătat un semnal continuu, iar în fig.2.3 un semnal discontinuu, determinat de nivelurile discrete $x_1, x_2, \dots, x_n$; acesta din urmă poate fi obținut printr-o operație de cuantizare a semnalului continuu anterior.

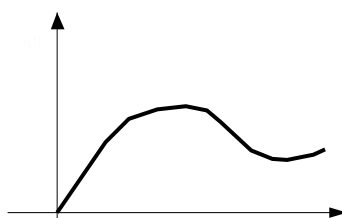


Fig.2.2 Funcția continuă

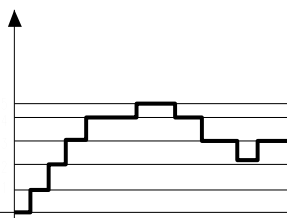


Fig.2.3 Funcția cuantizată

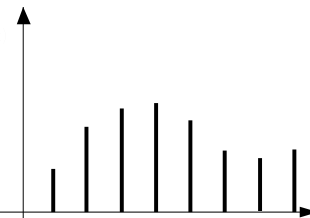


Fig.2.4 Funcția eșantionată

Uneori este util (vezi fig.2.4) ca discretizarea să se facă pe axa timpului în sensul ca semnalul continuu să fie reprezentat printr-o succesiune de valori, considerate la momente distincte; aceste valori reprezintă eșantioane ale semnalului continuu. Făcând cuantizarea nivelurilor semnalului și eșantionarea pe axa timpului, se obține semnalul din fig.2.5.

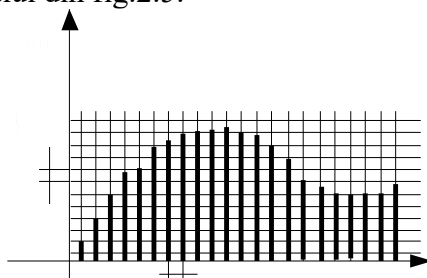


Fig.2.5 Funcția eșantionată și cuantizată

Cuantizarea este avantajoasă deoarece permite reprezentarea chiar și aproximativă, a semnalului continuu printr-un număr limitat de niveluri diferite. Aceste niveluri pot fi reprezentate codificat, fapt care conduce la formarea semnalelor numerice (cifrice sau digitale) din ce în ce mai intens folosite.

O altă clasificare a semnalelor se referă la faptul dacă acestea sunt modulate sau nu. **Modulația** presupune existența unei oscilații purtătoare de frecvență mai mică, cu parametrii influențați direct de semnalul modulator. În tehnica analizei comportării dinamice a servosistemelor întâlnim frecvent astfel de semnale modulate.

Analiza unui semnal $x(t)$ constă în echivalarea sa printr-o sumă de semnale elementare de forma:

$$x(t) = \sum_{n=0}^N a_n \cdot f_n(t) \quad (2.19)$$

în care a_n sunt coeficienții, iar $f_n(t)$ - expresiile analitice ale semnalelor elementare. Evident, este bine ca funcțiile $f_n(t)$ să fie reprezentabile analitic într-un mod cât mai simplu. Relatia (2.19) este deosebit de importantă în cazul circuitelor liniare, la care este aplicabilă teorema superpoziției. Dacă $y(t)$ și $\varphi(t)$ sunt răspunsurile elementului sau servosistemului liniar, sau considerat liniarizat pe porțiuni, la semnalele $x(t)$, $f_n(t)$ atunci se poate scrie:

$$y(t) = \sum_{n=0}^N a_n \cdot \varphi_n(t) \quad (2.20)$$

Se observă că răspunsul la semnalul $x(t)$ se deduce prin însumarea răspunsurilor parțiale, obținute pentru semnalele elementare $f_n(t)$; de regulă răspunsurile parțiale sunt calculate fără dificultăți prea mari. Analiza semnalului constă în determinarea coeficienților a_n , atunci când este dat semnalul $x(t)$ și când este precizat setul de funcții $f_n(t)$. Alegând setul de funcții $f_n(t)$, astfel încât el să se bucure de proprietatea de ortogonalitate, se stabilesc relații simple pentru calculul coeficienților a_n .

Între două funcții ortogonale, se stabilește relația integrală:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} f_m(t) \cdot f_n(t) \cdot dt = C^2, \text{ dacă } m=n$$

$$0, \text{ dacă } m \neq n \quad (2.21)$$

unde: t_0 este un moment oarecare, T - domeniul de ortogonalitate, iar C - norma funcțiilor. Când $C=1$ setul de funcții este ortonormat.

Dacă una dintre funcții este o constantă A , atunci din condiția de ortogonalitate:

$$\int A \cdot A dt = C^2, \text{ rezultă valoarea constantei } A$$

$$A = \frac{C}{\sqrt{T}}.$$

Înmulțind ambii membri ai egalității (2.19) cu funcția $f_m(t)$ și apoi integrând în intervalul de ortogonalitate, rezultă:

$$\int x(t) \cdot f_m(t) \cdot dt = \sum_{n=0}^N a_n f_n(t) f_m(t) dt = \sum_{n=0}^N a_n \cdot f_n(t) f_m(t) dt.$$

Ținând seama de condiția de ortogonalitate, se obține formula:

$$a_n = \frac{1}{C^2} \int x(t) f_m(t) dt. \quad (2.22)$$

Se presupune că ar exista o altă dezvoltare:

$$x_1(t) = \sum_{n=0}^N b_n f_n(t)$$

constituită cu alți coeficienți b_n , dar cu același set de funcții $f_n(t)$. Eroarea medie pătratică de aproximare, mărime pozitivă, sau cel puțin nulă, este:

$$D = \int [x(t) - \sum_{n=0}^N b_n f_n(t)]^2 dt \geq 0.$$

După dezvoltarea parantezei și ținând cont de condiția de ortogonalitate a funcțiilor $f_n(t)$, se găsește eroarea:

$$D = \int_T x^2(t) dt - 2C^2 \sum_{n=0}^N a_n b_n + C^2 \sum_{n=0}^N b_n^2 = \int_T x^2(t) dt - C^2 \sum_{n=0}^N a_n^2 + C^2 \sum_{n=0}^N (b_n - a_n)^2 \quad (2.23)$$

Se observă că eroarea medie pătratică este minimă în raport cu alegerea coeficienților b_n , atunci când $b_n = a_n$, deci când coeficienții dezvoltării semnalului $x(t)$ sunt calculați cu formula (2.22). Deoarece $D \geq 0$, se deduce inegalitatea Bessel:

$$C^2 \sum_{n=0}^N a_n^2 \leq \int_T x^2(t) dt \quad (2.24)$$

Dacă $N \rightarrow \infty$, inegalitatea Bessel conduce la egalitatea lui Parseval:

$$C^2 \sum_{n=0}^N a_n^2 = \int_T x^2(t) dt \quad (2.25)$$

Totalitatea coeficienților a_n , eventual reprezentați pe o axă, constituie spectrul semnalului, iar coeficienții înșiși sunt amplitudinile componentelor spectrale.

Din egalitatea Parseval se deduce că membrul drept este energia semnalului și se calculează prin însumare spectrală: fiecare componentă dă o contribuție energetică proporțională cu pătratul amplitudinii sale.

Puterea semnalului mediată pe întreg intervalul de ortogonalitate T este egală cu:

$$\frac{1}{T} \int_T x^2(t) dt = \frac{C^2}{T} \sum_{n=0}^N a_n^2 \quad (2.26)$$

Din relația (2.26) se determină cel mai important parametru cantitativ al comportării dinamice, valoarea eficace a semnalului (rădăcina mediei pătratică), RMS (root mean square), care conține informații privind energia oscilației semnalului:

$$x_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_T x^2(t) dt} \quad (2.27)$$

și care ține cont de desfășurarea în timp a oscilației și crește odată cu energia acesteia, fiind deci o măsură pentru analiza oscilației. În general la frecvențe joase se recomandă măsurarea deplasărilor sau a vitezelor, iar la frecvențe înalte, măsurarea accelerațiilor.

Aceasta se datorește atât limitării răspunsului în frecvență al aparatelor de măsură cât și sensibilității specifice a diferitelor tipuri de traductoare. Astfel, la frecvențe înalte, pentru a produce o deplasare măsurabilă, sunt necesare forțe foarte mari.

Valoarea medie, pe de altă parte, sau valoarea medie absolută (rectificată):

$$|x|_{\text{mediu}} = \frac{1}{T} \int_T |x(t)| dt \quad (2.28)$$

ține cont de desfășurarea în timp a oscilației, dar este considerată de interes practic restrâns, deoarece nu are legătură directă cu nici o mărime fizică utilă. Se recomandă deci, măsurarea valorii eficace.

În cazul analizei Fourier bazată pe funcțiile trigonometrice $\cos n \frac{2\pi}{T} t, \sin n \frac{2\pi}{T} t$, care au norma $C^2 = \frac{T}{2}$ se scrie:

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \sin(n\omega t) \quad (2.29)$$

și:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{T} \int x(t) \cos(n\omega t) dt \\ S_n &= \frac{2}{T} \int x(t) \sin(n\omega t) dt \\ C_0 &= \frac{\sqrt{2}}{T} \int x(t) dt \end{aligned} \quad (2.30)$$

Analiza Fourier a semnalelor periodice constă în a scrie relația:

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \sin(n\omega t) \quad (2.31)$$

care reprezintă forma trigonometrică a seriei Fourier.

Relația (2.31) mai poate fi scrisă și sub forma:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \text{ unde:} \\ A_n^2 &= C_n^2 + S_n^2, \varphi_n = -\arctg \frac{S_n}{C_n} \end{aligned} \quad (2.32)$$

care reprezintă forma armonică a seriei Fourier.

Relația (2.32) se mai poate scrie:

$$x(t) = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{j\varphi_n} e^{jn\omega t} \quad (2.33)$$

care reprezintă forma complexă sau exponențială a seriei Fourier.

Pentru semnalul periodic, se scrie seria Fourier:

$$x(t) = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} A_{n,c} e^{jn\omega t} \quad (2.34)$$

unde amplitudinile sunt date de formula :

$$A_{n,c} = \frac{2}{T} \int_T x(t) e^{-jn\omega t} dt \quad (2.35)$$

Întroducând relația (2.35) în relația (2.34) se obține:

$$x_T(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \left[\int_{t_1}^{t_2} x(t) e^{-jn\omega t} dt \right] e^{jn\omega t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{t_1}^{t_2} x(t) e^{-jn\omega t} dt \right] e^{jn\omega t} \omega \quad (2.36)$$

Relația devine:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} e^{j\omega t} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega \quad (2.37)$$

Se notează:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.38)$$

și rezultă:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.39)$$

Funcția $X(j\omega)$ este transformata Fourier a semnalului $x(t)$, și este denumită uneori funcție spectrală sau densitate spectrală de amplitudine complexă.

Densitatea spectrală de amplitudine, este în general o funcție complexă. Deoarece semnalul este exprimat printr-o funcție reală $x(t)$, se poate scrie:

$$X(j\omega) = A(\omega) - jB(\omega) \quad (2.40)$$

cu notațiile:

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos \omega t dt, \quad (2.41)$$

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin \omega t dt$$

Modulul și argumentul transformatei Fourier:

$$|X(j\omega)| = [A(\omega)^2 + B(\omega)^2]^{1/2}, \quad \phi(\omega) = -\arctg \frac{B(\omega)}{A(\omega)} \quad (2.42)$$

2.5.FUNCȚII DE TRANSFER. TRANSFORMATĂ DIRECTĂ ȘI INVERSĂ LAPLACE

Transformata Laplace este un mijloc de soluționare a ecuațiilor diferențiale prin transformarea ecuațiilor diferențiale în ecuații algebrice. Transformata Laplace transformă o problemă din domeniul real al timpului, în domeniul variabilei complexe s , unde s este operatorul Laplace.

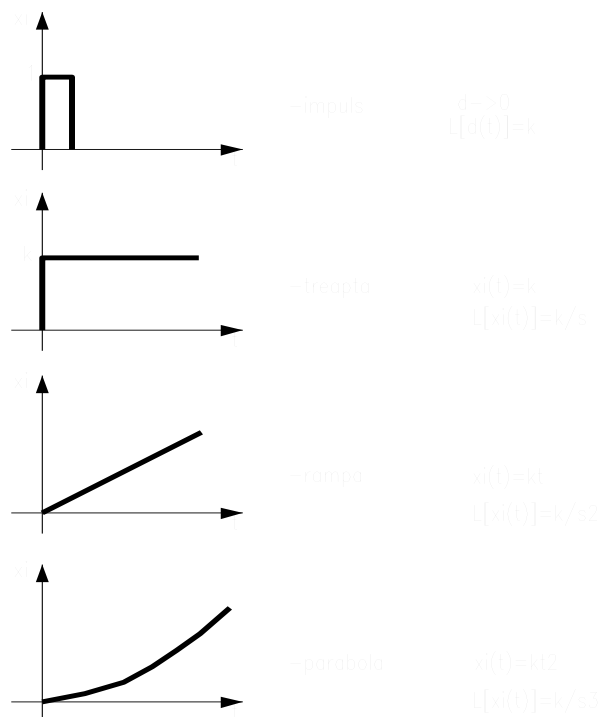
O funcție reală $f(t)$ de o variabilă reală $t > 0$, admite o transformată Laplace definită de relația:

$$L[f(t)] = F(s) = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{\varepsilon}^T f(t) e^{-st} dt \quad (2.43)$$

Pentru trecerea din domeniul complex în domeniul real, se folosește transformata inversă Laplace definită de integrala:

$$L^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (2.44)$$

Transformata Laplace a unor mărimi de intrare:



Transformata Laplace a unor funcții uzuale:

-transformata Laplace a unei funcții de tip diferențială de ordinul n este:

$$f(t) = \frac{d^n x}{dt^n} \quad (2.45)$$

$$L[f(t)] = s^n x(s)$$

-transformata Laplace a unei funcții de tip integrală:

$$f(t) = \int x(t) dt \quad (2.46)$$

$$L[f(t)] = \frac{x(s)}{s}$$

-transformata Laplace a unei funcții de tip exponențial :

$$f(t) = ke^{-\alpha t} \quad (2.47)$$

$$L[f(t)] = \frac{k}{s + \alpha}$$

-transformata Laplace a funcției de tip sinus:

$$f(t) = \sin \beta t \quad (2.48)$$

$$L[f(t)] = \frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$$

-transformata Laplace a funcției de tip cosinus:

$$f(t) = \cos \beta t \quad (2.49)$$

$$L[f(t)] = \frac{s}{s^2 + \beta^2}$$

Prin trecerea din domeniul complex (planul Laplace) în domeniul real, se poate determina funcția indicială. **Funcția indicială** reprezintă funcția care exprimă variația în timp a răspunsului unui element sau servosistem pentru o anumită mărime de intrare. Reprezentarea grafică a funcției indiciale se numește **caracteristică indicială**.

Cu ajutorul caracteristicilor indiciale pot fi determinați parametrii și performanțele comportării dinamice a elementelor și servosistemelor.

În scopul determinării performanțelor globale ale unui servosistem este necesară determinarea funcțiilor de transfer pe elementele componente ale acestuia.

Funcția de transfer a unui element sau servosistem este determinată de raportul dintre transformata Laplace a mărimii de ieșire și transformata Laplace a mărimii de intrare.

Se consideră servosistemul definit de schema bloc din fig.2.6.

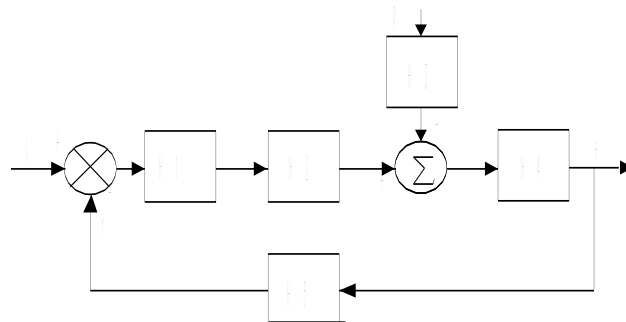


Fig.2.6 Schema bloc a unui servosistem

Pe baza algebrei funcțiilor de transfer se determină mărimea de ieșire:

$$[(i - eH_5)H_1H_2 - pH_3]H_4 = e$$

$$e(s) = \frac{H_1H_2H_4}{1 + H_1H_2H_4H_5}i(s) - \frac{H_3H_4}{1 + H_1H_2H_4H_5}p(s) \quad (2.50)$$

$$e(s) = H_i(s)i(s) - H_p(s)p(s)$$

pentru mărimi de intrare de tip treaptă, se obține:

$$e(s) = H_i(s) \cdot \frac{k_1}{s} - H_p(s) \cdot \frac{k_2}{s} \quad (2.51)$$

unde: k_1 și k_2 sunt mărimile de intrare.

Funcția indicială se determină aplicând transformata inversă Laplace expresiei precedente:

$$e(t) = L^{-1}\left[H_i(s) \cdot \frac{k_1}{s}\right] - L^{-1}\left[H_p(s) \cdot \frac{k_2}{s}\right] \quad (2.52)$$