

2

MODELAREA MATEMATICĂ A SISTEMELOR

Modelul matematic al unui sistem automat este constituit dintr-un ansamblu de ecuații algebrice și diferențiale, care exprimă cel mai fidel variația în timp a unei mărimi de ieșire, funcție de o anumită mărime de intrare.

Pentru obținerea modelului matematic trebuie parcurse următoarele etape:

- se descompune sistemul dinamic în componentele de bază, sau în elemente a căror modelare este mai simplă de efectuat, încercându-se echivalarea acestora cu elemente liniare sau liniarizabile pe porțiuni;
- se scriu relațiile caracteristice ale fiecăruia din aceste elemente dinamice, căutându-se a se exprima matematic cât mai fidel, fenomenele fizice care guvernează comportarea dinamică a acestora;
- se scriu relațiile privind conexiunile dintre elementele dinamice, care rezultă din însăși etapa anterioară.

Din ansamblul relațiilor determinate anterior, se încearcă a se obține o ecuație unică, între mărimea de intrare și mărimea de ieșire, ecuație liniară sau liniarizabilă pe porțiuni, când se poate considera elementul sau sistemul ca fiind de tip dipol.

Modelul matematic exprimat sintetic sub forma unei singure ecuații va avea forma:

$$b_n \frac{d^n e}{dt^n} + \dots + b_1 \frac{de}{dt} + b_0 e = a_n \frac{d^n i}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{di}{dt} + a_0 i \quad (2.1)$$

unde: e este mărimea de ieșire, iar i - mărimea de intrare.

2.1. LINIARIZAREA MODELELOR MATEMATICE

Majoritatea sistemelor dinamice reale conduc la modele matematice neliniare. Experimental, sistemele neliniare pot fi ușor deosebite de cele liniare, prin determinarea răspunsului la dublarea semnalului de intrare, la excitarea cu un semnal de tip treptă. Dacă amplitudinea semnalului de ieșire nu se dublează ci capătă o valoare oarecare, servosistemul este neliniar. Liniarizarea modelului matematic cuprinde: -liniarizarea modelului matematic al fiecărei componente prin dezvoltare în serie Taylor, sau liniarizarea pe porțiuni, în jurul unor puncte de funcționare, cu introducerea coeficienților de corecție; - asimilarea unor modele matematice cu funcții neliniare elementare uzitate, și liniarizarea acestora, funcție de tipul fiecăreia. Cu cât domeniul de funcționare ales pentru liniarizare este mai mic cu atât aproximarea este mai exactă.

Liniarizarea modelului matematic în jurul unor puncte de funcționare

Se consideră funcția de două variabile $f(x,y)$, care trebuie liniarizată într-un punct de funcționare cunoscut x_0, y_0 . Se calculează derivata totală a funcției în punctul de funcționare cunoscut:

$$df(x,y) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \cdot dx + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \cdot dy \quad (2.2)$$

Dacă se renunță la diferențială, relația (2.4) se rescrie astfel:

$$F(x, y) = k_1 \cdot x + k_2 \cdot y \quad (2.3)$$

unde: $-F(x,y)$ este funcția liniarizată, iar k_1 și k_2 reprezintă coeficienții de liniarizare.

În scopul realizării corecției funcției liniarizate, pentru a se obține aceeași valoare în punctul de funcționare atât pentru funcția inițială cât și pentru cea liniarizată, se introduc coeficienții de liniarizare, k_1^*, k_2^* . Acești coeficienți au expresiile:

$$\begin{aligned} k_1^* &= k_1 \cdot \frac{f(x_0, y_0)}{F(x_0, y_0)} \\ k_2^* &= k_2 \cdot \frac{f(x_0, y_0)}{F(x_0, y_0)} \end{aligned} \quad (2.4)$$

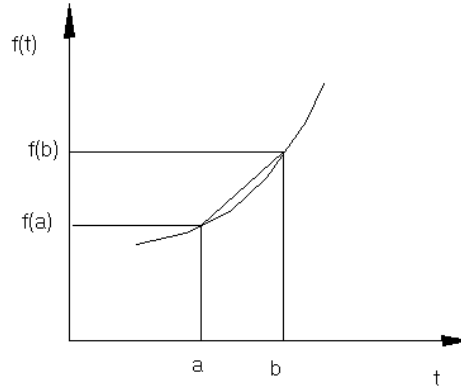


Fig.2.1 Liniarizarea funcțiilor pe porțiuni

Liniarizarea modelului matematic prin dezvoltare în serie Taylor

Fiind dată o funcție $f(x, y)$, care este continuă și derivabilă pe intervalul (a, b) , conform dezvoltării în serie Taylor, se scrie:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(a, b) + \frac{1}{1!} [f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)] + \\ &+ \frac{1}{2!} [f''_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2f''_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + f''_{yy}(a, b)(y - b)^2] + \dots \\ &\dots + \frac{1}{n!} \left[(x - a) \frac{\partial}{\partial x} + (y - b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^n f(a, b) + R_n(a, b) \\ R(a, b) &= \frac{1}{(n+1)!} \left[(x - a) \frac{\partial}{\partial x} + (y - b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^{n+1} f[a + \theta(x - a), b + \theta(y - b)] \end{aligned} \quad (2.5)$$

unde $0 < \theta < 1$

Dacă în relația (2.5) se înlocuiește punctul curent cu originea, se obține formula de dezvoltare în serie Mac-Laurin. Dacă se scrie dezvoltarea Mac-Laurin, pentru o funcție de o variabilă, se obține:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots \quad (2.6)$$

Liniarizarea funcțiilor

O procedură simplă de liniarizare a unor funcții a căror caracteristici se cunosc, constă în aproximarea prin segmente de dreaptă sau liniarizarea pe porțiuni definite.

Alegerea numărului de puncte și a pantelor nu este unică.

Aproximarea printr-un polinom de forma:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n \quad (2.7)$$

constă în determinarea coeficienților polinomului din condiția ca printr-un număr de puncte $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, polinomul să exprime cu exactitate valorile mărimii de ieșire. Din această condiție rezultă un sistem de $n+1$ ecuații cu $n+1$ necunoscute, acestea fiind reprezentate de coeficienții polinomului.

Este posibilă aproximarea prin polinoame pe porțiuni succesive, considerate în domeniul de variație al mărimii de intrare. Un alt tip de aproximare este liniarizarea prin polinoame de tip exponențial, de forma:

$$P(x) = b_0 + b_1 e^{\alpha_1 x} + b_2 e^{\alpha_2 x} + b_3 e^{\alpha_3 x} + \dots + b_n e^{\alpha_n x} \quad (2.8)$$

care constă în determinarea coeficienților b_i și ai exponenților α , prin luarea în considerare a unui număr suficient de puncte pe curba descrisă de funcția de aproximat.

Aproximarea prin expresii trigonometrice de forma:

$$P(x) = \frac{c_0}{2} + c_1 \cos(x + \varphi_1) + c_2 \cos(2x + \varphi_2) + \dots + c_n \cos(nx + \varphi_n) \quad (2.9)$$

este uneori de preferat față de aproximarea polinomială de tip exponențial.

Liniarizarea cu ajutorul funcțiilor transcendente de tip $\arctg x$, arcthx , shx , funcția lui Gauss, etc., este ușor de făcut, dar conduce uneori la expresii greu de utilizat în calcule.

Liniarizarea cu ajutorul unui polinom de polinoame de forma:

$$P(x) = A_0 P_0(x) + A_1 P_1(x) + A_2 P_2(x) + \dots + A_n P_n(x) \quad (2.10)$$

alegând polinoamele $P(x)$ astfel încât să fie satisfăcute criteriile de exactitate a aproximării.

Printre criteriile de exactitate se pot preciza:

-valoarea absolută a abaterii $y-f(x)$ să fie inferioară unei limite ε fixate apriori:

$$|y - f(x)| \leq \varepsilon \quad (2.11)$$

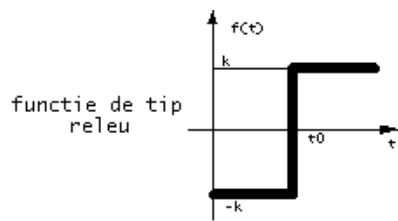
-valoarea medie a abaterii să fie nulă:

$$\int_a^b [y - f(x)] dx = 0 \quad (2.12)$$

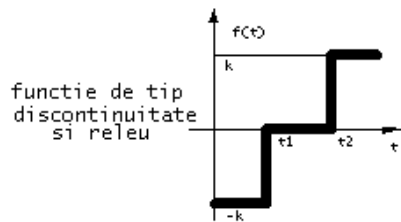
-media patratcă a erorii să fie inferioară limitei ε :

$$\int_a^b \frac{1}{b-a} [y - f(x)] dx \leq \varepsilon \quad (2.13)$$

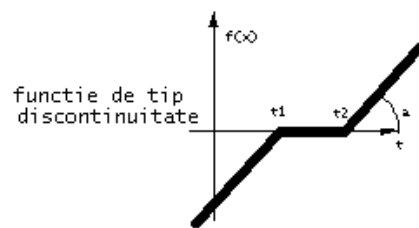
Tipuri de funcții neliniare și modul lor de liniarizare pe porțiuni:



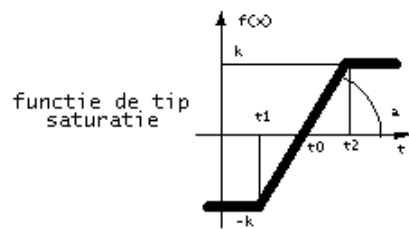
$$f(t) = \begin{cases} k & t > t_0 \\ 0 & t = t_0 \\ -k & t < t_0 \end{cases}$$



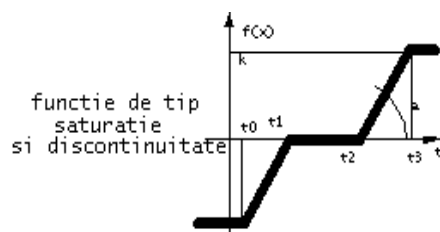
$$f(x) = \begin{cases} k & t > t_2 \\ 0 & t_1 < t < t_2 \\ -k & t < t_1 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} at & t > t_2 \\ 0 & t_1 < t < t_2 \\ -at & t < t_1 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} k & t > t_2 \\ at & t_0 < t < t_2 \\ -at & t_1 < t < t_0 \\ -k & t < t_1 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} k & t > t_3 \\ at & t_2 < t < t_3 \\ 0 & t_1 < t < t_2 \\ -at & t_0 < t < t_1 \\ -k & t < t_0 \end{cases}$$

2.2 REZOLVAREA CONVENȚIONALĂ A MODELULUI MATEMATIC

Rezolvarea modelului matematic presupune rezolvarea efectivă, prin integrare, a ecuației diferențiale exprimată sintetic prin relația (2.1).

Pentru integrarea ecuației diferențiale se parcurg următoarele etape:

-se determină soluția ecuației omogene, prin rezolvarea ecuației caracteristice; ecuația caracteristică reprezintă membrul stâng al relației (2.1); se rezolvă apoi ecuația neomogenă, propunând pentru membrul drept soluții particulare de forma răspunsului forțat.

În studiul comportării dinamice, soluția ecuației caracteristice, reprezintă **partea naturală a răspunsului** și caracterizează funcționarea servosistemului în regim tranzitoriu. Acest răspuns se mai numește și răspunsul liber al servosistemului.

Soluția va fi de forma:

$$e_l = \sum_{i=k+1}^n C_i e^{s_i t} + \sum_{i=1}^k C_i t^{i-1} e^{s_i t} \quad (2.14)$$

unde S_i , reprezintă soluția ecuației caracteristice a servosistemului.

Soluția parțială a ecuației neomogene constituie **partea forțată a răspunsului** și caracterizează funcționarea sistemului în regim staționar, deoarece la atingerea acestui regim, partea naturală a răspunsului, e_l , se anulează. Pentru rezolvarea ecuației neomogene, se alege o soluție particulară generală, funcție de tipul funcției forțate, $i(t)$.

Dacă $i(t)=k$, se alege ca soluție particulară $e_f = c$

Dacă $i(t)=kt^2$, se alege ca soluție particulară $e_f = c_2 t^2 + c_1 t + c_0$

Dacă $i(t)=k \sin \omega t$, se alege ca soluție particulară $e_f = c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t$

Dacă $i(t)=ke^{st}$, se alege ca soluție particulară $e_f = ce^{st}$.

Prin punerea condițiilor inițiale și la limită, se determină coeficienții soluției forțate.

Soluția finală va fi de forma:

$$e = e_l + e_f \quad (2.15)$$